Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

ИНСТИТУТ ПОСЛЕДИПЛОМНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЧРЕЖДЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

В. Н. Горбузов

ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Монография

Гродно 2005

УДК 517.936

Горбузов, В.Н. Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах : монография / В.Н. Горбузов. — Гродно : ГрГУ , 2005 . — 273 с. — ISBN 985-417-

Дано систематическое изложение теории интегралов систем уравнений в полных дифференциалах. Рассматриваются следующие вопросы: построение интегрального базиса систем уравнений в частных производных и в полных дифференциалах; автономность и цилиндричность интегралов и последних множителей; задача Дарбу о построении первых интегралов и последних множителей по известным частным интегралам для систем уравнений в полных дифференциалах; существование и ограниченность числа компактных интегральных многообразий, определяемых обыкновенными, в полных дифференциалах и в частных производных дифференциальными системами, а также системами уравнений Пфаффа и системами внешних дифференциальных уравнений; алгебраическая вложимость систем уравнений в полных дифференциалах.

Книга расчитана на научных работников и аспирантов, занимающихся общей теорией дифференциальных уравнений и её приложениями. Также может быть использована при чтении специальных курсов по дифференциальным уравнениям.

Библиогр. 127 назв.

Рекомендовано Советом Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена В.Ф. Зайцев;

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и оптимального управления Гродненского государственного университета им. Янки Купалы С.А. Минюк.

ISBN 985-417-

ПРЕДИСЛОВИЕ

Общая теория дифференциальных уравнений базируется на нахождении решений и построении интегралов.

На пути становления теории интегралов значительные вехи связаны с именами таких учёных, как J. Pfaff, C. Gauss, J.Jacobi, J.Liouville, Ф.Г.Миндинг, А.В.Летников, G.Darboux, H.Poincare, S.Lie, Г.В.Пфейффер, G.Frobenius, В.Г.Имшенецкий, J.Cartan, А.Н.Коркин, Н.М.Гюнтер, Н.П.Еругин, М.В.Долов и др.

Функционально-аналитическое исследование интегралов выполнено наиболее глубоко для обыкновенных дифференциальных систем и систем уравнений в частных производных.

Наряду с интегрированием в квадратурах [47; 62 – 64; 77], разрабатывались методы нахождения интегралов и установления их аналитических особенностей.

Так, исследования J.Liouville [124; 125] (особо рассматривавшего уравнение Риккати) были посвящены проблемам интегрируемости в квадратурах и привели к такой, ставшей классической, постановке задачи в теории интегралов, как изучение возможных видов интегралов и в случае наличия интеграла данного вида отыскания метода его нахождения. Исследования [115 – 117] J.Jacobi послужили отправным пунктом построения общего интеграла посредством известных первых интегралов. Им же был введён [116] метод последнего множителя (понятие, которое в литературе часто называют последним множителем Якоби) при построении общего интеграла. Глубокие исследования, ставшие фундаментом всей теории интегралов, принадлежат Ф.Г.Миндингу [118], А.В.Летникову [75], В.Г.Имшенецкому [66], Г.В.Пфейфферу (см. [78, с. 569 – 576]), А.Н.Коркину [70], Н.М. Гюнтеру [48].

Среди рассматриваемых задач одной из основных является задача Дарбу о построении и виде общего интеграла обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка по известным частным интегралам [71; 111], которая распространяется как на обыкновенные, так и на многомерные дифференциальные системы [3; 4; 11 – 15; 25; 33; 39 – 45].

Развитие метода последнего множителя получило в работах S.Lie, который не только дал ему новое истолкование, но и создал теорию инфинитезимальных преобразований [122; 123]. В его работах выделены принципиальные подходы интегрирования, которые послужили основой общей теории интегрирования. Многообразие методов интегрирования оказалось обозримым с единых позиций группового подхода [121], получило базу для классификации [120; 127].

Заметим, что интерес к глобальному исследованию дифференциальных систем, снизившийся к началу двадцатого века, к середине века возродился вновь. Отметим лишь монографии: E.Cartan [67; 68], Н.М.Гюнтер [48], Н.Г. Чеботарёв [106], L.Eisenhart [108], П.К.Рашевский [101], Е.А. Барбашин [6], Л.В.Овсянников [86], P.Olver [88], А.М. Самойленко [102]. Причина этого — открывшаяся важность таких подходов для математической физики [10; 65; 87; 114].

К этому периоду относится и обратная задача, поставленная Н.П.Еругиным [60; 61], о выделении из всего множества систем тех, которые обладают наперёд заданной интегральной кривой. Наиболее глубокие исследования обратной задачи проведены А.С.Галиуллиным [18; 19; 96]. Эта задача послужила толчком к весьма обширным исследованиям качественных характеристик в целом обыкновенных дифференциальных систем, имеющих частную интегральную кривую специального вида или со специальным аналитическим свойством.

Фундаментальные исследования предельных циклов обыкновенных дифференциальных систем по их интегралам и интегрирующим множителям проведены М.В.Доловым [49 – 59].

В.И.Мироненко разработал метод вложимости при исследовании обыкновенных дифференциальных систем [79; 81; 82] и подход по установлению наличия автономных интегралов у неавтономных обыкновенных дифференциальных систем [80].

Многие методы, разработанные для обыкновенных дифференциальных уравнений, послужили источником для создания теории интегралов многомерных систем. Рассмотрение дифференциальных систем более широкого класса дало не только обобщение известных результатов относительно интегралов обыкновенных дифференциальных систем, но и, что естественно, поставило перед необходимостью отыскания новых подходов, создания дополнительных теорий. Привело к переосмыслению сути проблемы и новым направлениям изучения глобальных свойств дифференциальных систем.

J.Pfaff [126] свёл задачу по интегрированию уравнений в частных производных к задаче интегрирования уравнений в полных дифференциалах. Дальнейшее развитие и углубление его результатов было дано C.Gauss [110] и чрезвычайно разноображено в подходах J.Jacobi [117], S.Lie [119], G.Frobenius [113], J.Drach [112], E.Cartan [68].

Современная теория интегралов систем уравнений в полных дифференциалах находится в стадии становления. Её проблемы рассматривались, как правило, по мере необходимости в связи с решением смежных задач. Это прежде всего задача о топологических характеристиках орбит как на фазовом пространстве в целом, так и локально в окрестностях сингулярных и особых точек; расположение орбит в фазовом пространстве; выпрямляемость орбит (В.В.Немыцкий [85], А.С.Понтрягин [95], И.В.Гайшун [14; 15; 17], А.И.Перов [90 − 94], Э.И.Грудо [46], В.В.Амелькин [1; 2], Н.Н.Ладис [72 − 74]) и др.

Общая и качественная теории систем уравнений в полных дифференциалах активно развиваются со второй половины прошлого столетия. При этом в общей теории основным объектом являются решения. Подробный обзор литературы и результатов по этим и другим направлениям теории систем уравнений в полных дифференциалах дано в монографиях И.В. Гайшуна [15; 16] и монографии В.В. Амелькина [1].

Интегральные многообразия, определяемые обыкновенными дифференциальными системами, системами уравнений в полных дифференциалах, системами уравнений Пфаффа и системами внешних дифференциальных уравнений [105], являются одним из основных объектов качественного исследования этих дифференциальных систем. При этом устанавливается тесная связь с дифференциальной геометрией и топологией, а в последнее время широко используются методы алгебраической топологии.

Теория интегралов систем уравнений в полных дифференциалах является предметом настоящего исследования [22; 24; 30; 33; 36 − 38; 44; 45; 89; 98; 104]. При этом имеет место тесная связь с системами уравнений в частных производных [11 − 13; 48; 83; 99] и обыкновенными дифференциальными системами [8; 21; 23; 25; 28; 29; 31; 32; 39 − 41; 43; 49 − 64; 69 − 71; 84; 97; 100; 104].

Глобальное качественное исследование систем уравнений в полных дифференциалах выполняется на предмет наличия интегральных многообразий обладающих специальными топологическими свойствами. Особо выделяются компактные интегральные многообразия [1; 26; 34; 35; 42; 76].

Список условных обозначений

Наряду с общепринятыми в математической литературе обозначениями дополнительно используются:

(CD) — система уравнений в полных дифференциалах (с. 19);

(CD)-(t_0, x_0) — задача Коши для системы (CD) с начальными данными (t_0, x_0) (с. 20);

(CDs) — s-неавтономная система уравнений в полных дифференциалах (с. 77);

(ICD) — вполне разрешимая система (CD) (с. 21);

(ICDs) — вполне разрешимая система (CDs) (с. 77);

(ACD) — автономная система уравнений в полных дифференциалах (с. 77);

(IACD) — вполне разрешимая система (ACD) (с. 77);

(PCD) — полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах (с. 100);

$\mathcal{A}$ — специальный класс систем (PCD) (с. 107);

(PCD$\mathcal{A}$) — полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах из класса $\mathcal{A}$ (с. 107);

(IPCD) — вполне разрешимая система (PCD) (с. 100);

(IPCD$\mathcal{A}$) — система (IPCD) из класса $\mathcal{A}$ (с. 107);

(APCD) — автономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах (с. 114);

(IAPCD) — вполне разрешимая система (APCD) (с. 134);

$\mathfrak{A}$ — специальный класс систем (APCD) (с. 127);

(APCD$\mathfrak{A}$) — система (APCD) из класса $\mathfrak{A}$ (с. 127);

(IAPCD$\mathfrak{A}$) — система (IAPCD) из класса $\mathfrak{A}$ (с. 135);

$\mathfrak{B}$ — специальный подкласс систем класса $\mathfrak{A}$ (с. 153);

(APCD$\mathfrak{B}$) — система (APCD) из класса $\mathfrak{B}$ (с. 153);

(IAPCD$\mathfrak{B}$) — система (IAPCD) из класса $\mathfrak{B}$ (с. 158);

(AD) — автономная обыкновенная дифференциальная система (с. 196);

(APD) — автономная обыкновенная полиномиальная дифференциальная система (с. 254);

(ADj) — автономные обыкновенные дифференциальные системы, индуцированные системой (ACD) (с. 206);

(APDj) — автономные обыконовенные дифференциальные системы, индуцированные системой (APCD) (с. 134);

(∂) — линейная однородная система уравнений в частных производных первого порядка (с. 37);

(N∂) — нормальная линейная однородная система уравнений в частных производных (с. 40);

(∂ACD) — линейная однородная система уравнений в частных производных, индуцированная системой (ACD) (с. 211);

(Pf) — система уравнений Пфаффа (с. 211);

(ED) — система внешних дифференциальных уравнений (с. 211);

Для ссылок на формулы (теоремы, леммы и т.д.) будем использовать записи $(k.l)$, $(k.l.m)$ и $(k.l.m.n)$, в которых k — номер формулы, l — номер пункта, m — номер параграфа, n — номер главы. При этом введение считаем нулевой главой.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Линейные дифференциальные операторы первого порядка

1. Основные свойства

В n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ введём правую прямоугольную декартову систему координат $Ox_1 \ldots x_n$ с ортонормированным базисом $e^1, \ldots, e^n$. Положение точки x в $\mathbb{R}^n$ будем определять по её координатам $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Отображение $u\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{X}$ — область из $\mathbb{R}^n$, в проекциях зададим формулой $u\colon x \to \sum\limits_{j=1}^{m} u_j(x)e^j$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Условный скаляр

$$\mathfrak{A}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_i, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

где ∂_i — оператор дифференцирования по координате x_i, назовём *линейным дифференциальным оператором первого порядка* [27, с. 108 – 173].

Вектор-функция $a\colon x \to \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)e^i$, $\forall x \in \mathcal{X}$, ассоциирована с линейным дифференциальным оператором первого порядка $\mathfrak{A}$.

Линейный дифференциальный оператор $\mathfrak{A}$ с помощью векторного дифференциального оператора $\partial = \sum\limits_{\xi=1}^{n} (\partial_\xi)e^\xi$ и вектора-функции a можно записать компактно

$$\mathfrak{A}(x) = a(x)\partial, \ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Если s^0 — орт ненулевого вектора s из арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, то линейный дифференциальный оператор первого порядка $\mathsf{D}_s = s^0\,\partial$ назовём *производной по направлению вектора* s.

1.1. Линейное пространство операторов. Совокупность всех линейных дифференциальных операторов первого порядка, заданных на области $\mathcal{X}$, обозначим $\mathbb{W}$.

На множестве $\mathbb{W}$ определим бинарное отношение равенства

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \iff a_i(x) = b_i(x),\ \forall x \in \mathcal{X},\ i = \overline{1, n}\,,$$

операторов $\mathfrak{A}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_i$ и $\mathfrak{B}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i$, $\forall x \in \mathcal{X}$, которое является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{W}$.

Определим на $\mathbb{W}$ две бинарные операции: сложение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,\partial_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\partial_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\partial_i$$

и умножение оператора на скаляр

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i\,\partial_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i\,\partial_i.$$

Тем самым установим структуру вещественного линейного пространства $(\mathbb{W}, \mathbb{R}, +\,, \cdot\,, =)$ на множестве $\mathbb{W}$.

Совокупность всех векторов-функций, являющихся отображением области $\mathcal{X}$ из пространства $\mathbb{R}^n$ в это пространство, обозначим $\mathbb{V}$. Множество $\mathbb{V}$ является линейным пространством $(\mathbb{V}, \mathbb{R}, +\,, \cdot\,, =)$.

Линейные пространства $\mathbb{W}$ и $\mathbb{V}$ изоморфны:

$$(\mathbb{W}, \mathbb{R}, +\,, \cdot\,, =) \simeq (\mathbb{V}, \mathbb{R}, +\,, \cdot\,, =).$$

В пространстве $\mathbb{W}$ выделим совокупность из q операторов

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q \tag{1}$$

с общим множеством определения[1] $\mathrm{D}\mathfrak{A}_\tau = \mathcal{X}$, $\tau = \overline{1, q}\,$.

Если в поле $\mathbb{R}$ существуют числа λ_τ, $\tau = \overline{1, q}\,$, не равные одновременно нулю, такие, что линейная комбинация над полем $\mathbb{R}$

[1]Через $\mathrm{D}f$ и $\mathrm{D}\mathfrak{A}$ будем обозначать соответственно множество определения функции f и множество определения оператора $\mathfrak{A}$.

$$\sum_{\tau=1}^{q} \lambda_\tau \mathfrak{A}_\tau(x) = \mathfrak{O},\ \forall x \in \mathcal{X},$$

то операторы (1) назовём *линейно зависимыми на области* $\mathcal{X}$.

Если в поле $\mathbb{R}$ существуют числа λ_τ, $\tau = \overline{1, q}$, не равные одновременно нулю, такие, что в фиксированной точке x_0 из области $\mathcal{X}$ линейная комбинация $\sum\limits_{\tau=1}^{q} \lambda_\tau \mathfrak{A}_\tau(x_0) = \mathfrak{O}$, то операторы (1) назовём *линейно зависимыми в точке* x_0. В противном случае операторы (1) назовём *линейно независимыми в точке* x_0.

Линейные дифференциальные операторы первого порядка (1), линейно независимые в каждой точке области $\mathcal{X}$, назовём *линейно независимыми на области* $\mathcal{X}$.

Если операторы (1) не являются линейно зависимыми на области $\mathcal{X}$, то это ещё не значит, что они являются линейно независимыми на области $\mathcal{X}$.

Другими словами, если операторы (1) не являются линейно зависимыми на области $\mathcal{X}$, то не исключена возможность существования в области $\mathcal{X}$ точки x, в которой операторы (1) являются линейно зависимыми.

Чтобы операторы (1) были линейно зависимыми на $\mathcal{X}$, необходима их линейная зависимость в каждой точке области $\mathcal{X}$.

Обратное, вообще говоря, не верно, то есть, существуют операторы, линейно зависимые в каждой точке области $\mathcal{X}$, но не являющиеся линейно зависимыми на области $\mathcal{X}$.

То, что линейная зависимость операторов в каждой точке области не является достаточным условием их линейной зависимости на этой области, позволяет ввести ещё одну линейную связь между операторами.

Линейно зависимые в каждой точке области $\mathcal{X}$ операторы (1) назовём *линейно связанными на области* $\mathcal{X}$.

Тогда линейно зависимые на области операторы будут и линейно связанными на этой области.

Если $\mathfrak{A}(x_0) = \mathfrak{O}$, то x_0 назовём *нулём* оператора $\mathfrak{A}$.

Критерий линейной связанности операторов: операторы (1) линейно связаны на области $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда существуют такие функции $u_\tau\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, что линейная комбинация[2]

$$\sum_{\tau=1}^{q} u_\tau(x)\mathfrak{A}_\tau(x) = \mathfrak{O},\ \forall x \in \mathcal{X}, \ \text{ при } \sum_{\tau=1}^{q} \bigl|u_\tau(x)\bigr| \neq 0,\ \forall x \in \complement_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_0,$$

где $\mathcal{X}_0$ — множество общих нулей операторов (1).

1.2. Действие оператора на функцию. В множестве дифференцируемых на области $\mathcal{X}$ функций действие оператора $\mathfrak{A}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_i$ на функцию $u\colon x \to \sum\limits_{j=1}^{m} u_j(x)e^j$ вычисляется по формулам:

$$\mathfrak{A}u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_i u(x),\ \forall x \in \mathcal{X}; \tag{2}$$

$$\mathfrak{A}u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\partial_i \sum_{j=1}^{m} u_j(x)e^j,\ \forall x \in \mathcal{X}; \tag{3}$$

$$\mathfrak{A}u(x) = \mathfrak{A} \sum_{j=1}^{m} u_j(x)e^j,\ \forall x \in \mathcal{X}. \tag{4}$$

2. Скобки Пуассона

Скалярную функцию векторного аргумента

$$\begin{gathered}[u,v]\colon (p,x) \to \sum_{i=1}^{n} \bigl(\partial_{p_i} u(p,x)\partial_{x_i} v(p,x) - \partial_{x_i} u(p,x)\partial_{p_i} v(p,x)\bigr), \\ \forall (p,x) \in \mathcal{D},\ \ p = (p_1, \ldots, p_n),\ x = (x_1, \ldots, x_n),\end{gathered} \tag{1}$$

составленную на основании непрерывно дифференцируемых на области $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{2n}$, скалярных функций $u\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ и $v\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$,

[2] $\complement_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_0$ — дополнение множества $\mathcal{X}_0$ до множества $\mathcal{X}$.

назовём *скобками Пуассона* функций u и v.

Бинарную операцию [ ] на линейном пространстве[3] $C^1(\mathcal{D})$ скалярных функций также назовём *скобками Пуассона*.

Основными свойствами скобок Пуассона являются: кососимметричность

$$[u,v] = -[v,u],\ \forall u,v \in C^1(\mathcal{D}); \tag{2}$$

билинейность $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$

$$[u,\alpha v + \beta w] = \alpha[u,v] + \beta[u,w],\ \forall u,v,w \in C^1(\mathcal{D}), \tag{3}$$

и

$$[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u,w] + \beta[v,w],\ \forall u,v,w \in C^1(\mathcal{D}); \tag{4}$$

тождество Якоби

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0,\ \forall u,v,w \in C^2(\mathcal{D}), \tag{5}$$

а также формулы (скобки Пуассона произведения функций)

$$[u,vw] = w[u,v] + v[u,w],\ \forall u,v,w \in C^1(\mathcal{D}), \tag{6}$$

и (скобки Пуассона сложной функции) на области $\mathcal{D}$

$$\begin{gathered}[u(p,x), v(w_1(p,x),\ldots,w_s(p,x))] = \\ = \sum_{k=1}^{s} \partial_{w_k} v(w_1,\ldots,w_s)\big|_{w=w(p,x)}\ [u(p,x), w_k(p,x)].\end{gathered} \tag{7}$$

Для линейных относительно p функций

$$A\colon (p,x) \to \sum_{i=1}^{n} A_i(x)p_i \quad \text{и} \quad B\colon (p,x) \to \sum_{i=1}^{n} B_i(x)p_i$$

[3] Через $C(\mathcal{D})$, $C^k(\mathcal{D})$, $C^\infty(\mathcal{D})$ и $C^\star(\mathcal{D})$ обозначим множества непрерывных, k-раз непрерывно дифференцируемых, бесконечное число раз непрерывно дифференцируемых и голоморфных на области $\mathcal{D}$ функций (операторов) соответственно.

скобки Пуассона

$$\bigl[A(p,x),B(p,x)\bigr]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\xi=1}^{n}\bigl(A_{\xi}(x)\partial_{\xi}B_i(x)-B_{\xi}(x)\partial_{\xi}A_i(x)\bigr)p_i,$$
$$\forall x\in\mathcal{X},\ \forall p_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

В функциях A и B формально заменим p_i на ∂_i. Получим линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{A}(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x)\partial_i \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}(x)=\sum_{i=1}^{n}B_i(x)\partial_i.$$

Тогда формула (8) на области $\mathcal{X}$ будет иметь вид

$$[\mathfrak{A}(x),\mathfrak{B}(x)]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\xi=1}^{n}\bigl(A_{\xi}(x)\partial_{\xi}B_i(x)-B_{\xi}(x)\partial_{\xi}A_i(x)\bigr)\partial_i. \tag{9}$$

Линейный дифференциальный оператор первого порядка (9) назовём *скобками Пуассона* или *произведением Ли* линейных дифференциальных операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

За бинарной операцией $[\ ]$ сохраним название *скобок Пуассона* и введём на равных правах ещё одно название — *умножение Ли* операторов.

Скобки Пуассона могут быть вычислены по формуле

$$[\mathfrak{A}(x),\mathfrak{B}(x)]=\sum_{i=1}^{n}\Bigl(\bigl(A_1(x)\partial_1B_i(x)-B_1(x)\partial_1A_i(x)\bigr)+\ldots+$$
$$+\bigl(A_n(x)\partial_nB_i(x)-B_n(x)\partial_nA_i(x)\bigr)\Bigr)\partial_i,\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{10}$$

которая является разновидностью формулы (9).

Если учесть формулу (2.1) действия оператора на функцию, то формула (9) может быть записана в виде

$$[\mathfrak{A}(x),\mathfrak{B}(x)]=\sum_{i=1}^{n}\bigl(\mathfrak{A}B_i(x)-\mathfrak{B}A_i(x)\bigr)\partial_i,\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{11}$$

или

$$[\mathfrak{A}(x), \mathfrak{B}(x)] = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}\bigl(B_i(x)\bigr)\partial_i - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{B}\bigl(A_i(x)\bigr)\partial_i, \ \forall x \in \mathcal{X}. \quad (12)$$

На основании формул (2) – (5) для скобок Пуассона линейных дифференциальных операторов устанавливаем свойства кососимметричности, билинейности и тождество Якоби.

На линейном пространстве $C^{\infty}(\mathcal{X})$ операторов умножение Ли является внутренней бинарной операцией. Множество бесконечное число раз непрерывно дифференцируемых линейных дифференциальных операторов является некоммутативным и неассоциативным кольцом с групповой операцией сложения и второй бинарной операцией скобками Пуассона.

Свойство кососимметричности

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}], \ \forall \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in C^1(\mathcal{X});$$

означает, что скобки Пуассона $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ и $[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$ взаимно противоположные.

Если

$$[\mathfrak{A}(x), \mathfrak{B}(x)] = [\mathfrak{B}(x), \mathfrak{A}(x)], \ \forall x \in \mathcal{X},$$

то скобки Пуассона $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, равно как и скобки Пуассона $[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$, назовём *симметричными* на области $\mathcal{X}$.

Критерий симметричности скобок Пуассона. Скобки Пуассона $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ *являются симметричными на области* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда, когда* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{O}$ *на этой области*:

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}] \iff [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{O}. \quad (13)$$

Операторное тождество

$$[\mathfrak{A}(x), \mathfrak{B}(x)] = \mathfrak{O}, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

равносильно системе дифференциальных тождеств

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\partial_i B_\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\partial_i A_\xi(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \xi = \overline{1, n}\,. \quad (14)$$

Тождества (14) являются координатным критерием симметричности скобок Пуассона операторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Векторные функции

$$A\colon x \to \sum_{i=1}^{n} A_i(x)e^i \quad \text{и} \quad B\colon x \to \sum_{i=1}^{n} B_i(x)e^i$$

с $\mathrm{D}A = \mathrm{D}B = \mathcal{X}$ назовём *симметричными по Ли* на $\mathcal{X}$, если их координатные функции связаны тождествами (14).

В символах, принятых в теории поля, тождества (14) могут быть записаны в видах:

$$A(x)\nabla B_\xi(x) = B(x)\nabla A_\xi(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \xi = \overline{1, n}\,,$$

и

$$A(x)\operatorname{grad} B_\xi(x) = B(x)\operatorname{grad} A_\xi(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \xi = \overline{1, n}\,.$$

Пример 1. *Докажем, что*

$$\mathfrak{L}\operatorname{div}\mathfrak{M}(x) = \mathfrak{M}\operatorname{div}\mathfrak{L}(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \mathcal{X} \in \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

если симметричны скобки Пуассона дважды непрерывно дифференцируемых на области $\mathcal{X}$ *операторов*

$$\mathfrak{L}(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x)\partial_i \quad \textit{и} \quad \mathfrak{M}(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x)\partial_i.$$

Действительно, в соответствии с критерием (13) скобки Пуассона операторов $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ симметричны, если и только если

$$[\mathfrak{L}(x), \mathfrak{M}(x)] = \mathfrak{O}, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

то есть, когда выполняются тождества (14).

Перепишем эти тождества в виде разностей

$$\sum_{i=1}^{n}\big(L_i(x)\partial_i M_\xi(x) - M_i(x)\partial_i L_\xi(x)\big) = 0, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \xi = \overline{1, n}\,,$$

которые на области $\mathcal{X}$ продифференцируем и сложим:

$$\sum_{\xi=1}^{n}\partial_\xi \sum_{i=1}^{n}\big(L_i(x)\partial_i M_\xi(x) - M_i(x)\partial_i L_\xi(x)\big) =$$

$$= \sum_{\xi=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl(\partial_\xi L_i(x)\partial_i M_\xi(x) - \partial_i L_\xi(x)\partial_\xi M_i(x) + L_i(x)\partial_{i\xi} M_\xi(x) -$$

$$- M_i(x)\partial_{i\xi} L_\xi(x)\bigr) = \sum_{\xi=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl(L_i(x)\partial_{i\xi} M_\xi(x) - M_i(x)\partial_{i\xi} L_\xi(x)\bigr) = 0.$$

Учитывая данные вычисления, получаем, что

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{M}(x) - \mathfrak{M}\,\mathrm{div}\mathfrak{L}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Biggl(L_i(x)\,\partial_i\sum_{\xi=1}^{n}\partial_\xi M_\xi(x) - M_i(x)\,\partial_i\sum_{\xi=1}^{n}\partial_\xi L_\xi(x)\Biggr) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\xi=1}^{n}\bigl(L_i(x)\partial_{\xi i} M_\xi(x) - M_i(x)\partial_{\xi i} L_\xi(x)\bigr) = 0,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

откуда следует тождество (15). ■

В вычислениях могут быть использованы формулы:

$$\sum_{i=1}^{n}[\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i] = \Biggl[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i, \sum_{i=1}^{n}\mathfrak{B}_i\Biggr] + \sum_{\nu=1}^{n-1}\Biggl[\mathfrak{B}_\nu, \sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mathfrak{A}_\mu\Biggr] - \sum_{\nu=1}^{n-1}\Biggl[\mathfrak{A}_\nu, \sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mathfrak{B}_\mu\Biggr];$$

$$[\mathfrak{A} + \mathfrak{C}, \mathfrak{B} + \mathfrak{D}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}, \mathfrak{D}] + [\mathfrak{C}, \mathfrak{B}] + [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}];$$

$$[\mathfrak{A}, u\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}u]\mathfrak{B} + u[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}];$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 \det \mathrm{H}_n(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) &= \mathrm{div}\,\mathfrak{A}_1 \det \mathrm{H}_n(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) + \\ &+ \sum_{r=2}^{n}\det \mathrm{H}_n(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{r-1}, [\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_r], \mathfrak{A}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{A}_n),\end{aligned} \tag{16}$$

где скалярная функция u и операторы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i,\ i = \overline{1,n}$, из линейных пространств $C^1(\mathcal{X})$, а $\det \mathrm{H}_n(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \bigl|a_{i\xi}(x)\bigr|$ суть определитель n-го порядка операторов

$$\mathfrak{A}_i(x) = \sum_{\xi=1}^{n} a_{i\xi}(x)\partial_\xi,\ \forall x \in \mathcal{X},\ i = \overline{1,n}.$$

3. Коммутатор

3.1. Произведение линейных дифференциальных операторов. *Произведением* оператора $\mathfrak{A}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x)\partial_i, \ \forall x \in \mathcal{X},$ на оператор $\mathfrak{B}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(x)\partial_i, \ \forall x \in \mathcal{X},$ назовём линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(x) = \sum_{i=1}^{n} \big(\mathfrak{A}B_i(x)\big)\partial_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\xi=1}^{n} A_i(x)B_\xi(x)\partial_{\xi i}, \ \forall x \in \mathcal{X}, \quad (1)$$

который на области $\mathcal{X}$ может быть вычислен и по формуле

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\xi=1}^{n} \big(A_\xi(x)\partial_\xi B_i(x)\partial_i + A_\xi(x)B_i(x)\partial_{i\xi}\big). \quad (2)$$

Операцию нахождения произведения $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ назовём *умножением оператора $\mathfrak{A}$ на оператор $\mathfrak{B}$*.

Из формулы (1) следует, что

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{A})(x) = \sum_{i=1}^{n} \big(\mathfrak{B}A_i(x)\big)\partial_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\xi=1}^{n} B_i(x)A_\xi(x)\partial_{\xi i}, \ \forall x \in \mathcal{X}. \quad (3)$$

Сопоставляя равенства (1) и (3), заключаем, что операция умножения линейных дифференциальных операторов первого порядка некоммутативна.

3.2. Коммутатор линейных дифференциальных операторов. *Коммутатором* $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$ непрерывно дифференцируемых на области $\mathcal{X}$ пространства $\mathbb{R}^n$ линейных дифференциальных операторов первого порядка $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ назовём дифференциальный оператор

$$[\mathfrak{A}(x),\mathfrak{B}(x)] = \mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(x) - \mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}(x), \ \forall x \in \mathcal{X}. \quad (4)$$

Если использовать формулы (1) и (3), то коммутатор

$$
\begin{gathered}
[\mathfrak{A}(x), \mathfrak{B}(x)] = \sum_{i=1}^{n} \bigl(\mathfrak{A} B_i(x) - \mathfrak{B} A_i(x)\bigr)\partial_i + \\
+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\xi=1}^{n} \bigl(A_i(x)B_\xi(x) - B_i(x)A_\xi(x)\bigr)\partial_{\xi i}, \ \forall x \in \mathfrak{X}.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Коммутатор кососимметричен $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$ и билинеен

$$[\mathfrak{A}, \alpha\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{C}] = \alpha[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + \beta[\mathfrak{A}, \mathfrak{C}] \ \ (\alpha, \ \beta \in \mathbb{R}).$$

Коммутатор является дифференциальным оператором второго порядка. Однако если допустить равенство смешанных производных в формуле (5), то коммутатор (4) сводится к скобкам Пуассона (11.2) соответствующих линейных дифференциальных операторов первого порядка.

Поэтому, например, на множествах $C^k(\mathfrak{X})$, $k \geqslant 2$, и $C^\star(\mathfrak{X})$ термины «коммутатор» и «скобки Пуассона» используются на равных правах.

Этим обстоятельством обоснована одинаковость условной записи для скобок Пуассона и коммутатора.

§ 2. Полная разрешимость системы уравнений в полных дифференциалах

Пусть $t = (t_1, \ldots, t_m)$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точки соответственно пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, $m < n$, а dt и dx суть векторы-столбцы $dt = \operatorname{colon}(dt_1, \ldots, dt_m)$ и $dx = \operatorname{colon}(dx_1, \ldots, dx_n)$.

Множество матриц размера $n \times m$ (n строк, m столбцов) обозначим $\mathbb{M}^{n,m}$.

Матрица $X \in \mathbb{M}^{n,m}$ имеет вид $\|X_{ij}\|$, её элементами X_{ij} являются скалярные функции векторного аргумента

$$X_{ij}\colon (t,x) \to X_{ij}(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,,$$

с общим множеством определения

$$\mathrm{D}X_{ij} = \mathcal{D},\ \mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X},\ \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n,$$

причём $\mathcal{T}$ и $\mathcal{X}$ — области.

Дифференциальную систему

$$dx = X(t,x)\,dt \tag{CD}$$

назовём *системой уравнений в полных дифференциалах*.

Относительно дифференциальной системы (CD) пространство $\mathbb{R}^n$ назовём *фазовым пространством*, $\mathbb{R}^{m+n}$ — *расширенным пространством*, а $\mathbb{R}^m$ — *расширяющим пространством*.

1. Задача Коши

Определение 1. *Решением на области* $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, *системы* (CD) *назовём векторную функцию векторного аргумента* $x\colon \mathcal{T}' \to \mathbb{R}^n$, *которая удовлетворяет условиям*:

1) *функция* x *дифференцируема на области* $\mathcal{T}'$;
2) *точки* $(t, x(t)) \in \mathcal{D}$, $\forall t \in \mathcal{T}'$;
3) *выполняется матричное тождество*

$$dx(t) = X(t, x(t))\,dt,\ \forall t \in \mathcal{T}'. \tag{1}$$

Для системы (CD) задача Коши состоит в следующем: *най-*

ти решения $x\colon t\to x(t),\ \forall t\in \mathrm{U}(t_0),$ *на некоторой окрестности* $\mathrm{U}(t_0)$ *точки* $t_0,\ \mathrm{U}(t_0)\subset \mathcal{T},$ *системы* (CD)*, которые принимают значение* x_0 *при* $t=t_0,$ *причём точка* (t_0,x_0) *принадлежит области* $\mathcal{D}$.

В этом случае будем говорить о решениях на области-окрестности $\mathrm{U}(t_0)$ системы (CD), удовлетворяющих начальному условию $x(t_0)=x_0$. Точку (t_0,x_0) назовём начальными данными задачи Коши; вектор $t_0=\left(t_1^0,\ldots,t_m^0\right)$ назовём начальным значением независимых вектор-переменных t; а вектор $x_0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ назовём начальным значением искомых решений задачи Коши.

Примем условные записи: (CD)-(t_0,x_0) — задача Коши с начальными данными (t_0,x_0) для системы (CD);

$x\colon t\to x\big(t;(t_0,x_0)\big),\ \forall t\in \mathrm{U}(t_0),$ — решение $x\colon t\to x(t),$ $\forall t\in \mathrm{U}(t_0),$ задачи Коши с начальными данными (t_0,x_0).

В рамках задачи Коши (CD)-(t_0,x_0) будем выделять задачи.

1. Задача существования решения задачи Коши.

Будем говорить, что решение задачи Коши (CD)-(t_0,x_0) существует, если у точки t_0 из области $\mathcal{T}$ существует такая окрестность $\mathrm{U}(t_0)$, которая содержится в области $\mathcal{T}$, и существует решение на области-окрестности $\mathrm{U}(t_0)$ системы (CD) $x\colon t\to x(t), \forall t\in \mathrm{U}(t_0),$ которое удовлетворяет начальному условию $x(t_0)=x_0,$ причём точка $(t_0,x_0)\in\mathcal{D}$.

2. Задача единственности решения задачи Коши.

Будем говорить, что задача Коши (CD)-(t_0,x_0) имеет единственное решение, если существует решение задачи Коши (CD)-(t_0,x_0) и существует в расширяющем пространстве $\mathbb{R}^m$ окрестность точки $t_0,$ на которой решение задачи Коши (CD)-(t_0,x_0) единственное.

Возможность однозначного разрешения задачи Коши на множестве отразим следующим понятием.

Определение 2. *Систему* (CD) *назовём вполне разрешимой на подобласти* $\mathcal{D}'$ *области* $\mathcal{D}$, *если в любой точке* (t_0,x_0) *из области* $\mathcal{D}'$ *решение задачи Коши* (CD)-(t_0,x_0) *единственно*.

Область, на которой задача Коши для системы (CD) вполне разрешима, будем называть *областью полной разрешимости* системы (CD) или *областью единственности* системы (CD).

Вполне разрешимую на области $\mathcal{D}$ систему (CD) будем обозначать (ICD).

3. Задача об аналитическом виде функции, являющейся решением задачи Коши.

Классической задачей такого плана является задача о голоморфности решения $x\colon t \to x\big(t; (t_0, x_0)\big)$, $\forall t \in \mathrm{U}(t_0)$. Сюда же относятся, например, задачи об алгебраичности и представлении специальными функциями решения задачи Коши (CD)-(t_0, x_0).

2. Условия Фробениуса

Систему (CD) будем рассматривать при условии, что матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$, то есть, когда все её элементы X_{ij} являются непрерывно дифференцируемыми на области $\mathcal{D}$ функциями. Для систем этого класса полная разрешимость может быть установлена на основании следующих положений.

2.1. Разрешимость задачи Коши. Если матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$, то задача Коши разрешается следующим образом: в любой произвольным образом взятой точке (t_0, x_0) из области $\mathcal{D}$ либо не существует решения задачи Коши (CD)-(t_0, x_0), либо задача Коши (CD)-(t_0, x_0) разрешается однозначно.

Эту закономерность выражает

Теорема 1. *Пусть у системы* (CD) *матрица* $X \in C^1(\mathcal{D})$. *Тогда для любой точки* (t_0, x_0) *из области* $\mathcal{D}$ *можно указать в расширяющем пространстве* $\mathbb{R}^m$ *замкнутый шар, на котором решение задачи Коши* (CD)-(t_0, x_0) *может быть лишь единственным.*

Доказательство. В области $\mathcal{D}$ произвольным образом выберем точку (t_0, x_0), в которой решение задачи Коши (CD)-(t_0, x_0) существует. В расширенном пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ введём норму, а в расширяющем пространстве $\mathbb{R}^m$ с наследственной нормой выделим такой постоянный вектор v с началом в точке t_0, что его норма $\|v\| = r$. Положительное число r выберем так, что замкнутый в нормированном пространстве $\mathbb{R}^m$ шар $\mathrm{D}_r^m(t_0)$ радиуса r с центром в точке t_0 содержится в окрестности $\mathrm{U}(t_0)$ точки t_0. Окрестность $\mathrm{U}(t_0)$ такова, что на ней решение задачи Коши (CD)-(t_0, x_0) существует.

Система (CD) вдоль вектора v, то есть, когда $t = t_0 + v\tau$,

$\forall \tau \in [0;1]$, является обыкновенной дифференциальной системой n-го порядка

$$dy = X(t_0 + v\tau, y)v\, d\tau. \tag{1}$$

Функция

$$y\colon \tau \to x(t_0 + v\tau),\ \forall \tau \in [0;1],$$

построенная на основании решения

$$x\colon t \to x\big(t; (t_0, x_0)\big),\ \forall t \in \mathrm{U}(t_0),$$

системы (CD), будет решением на отрезке $[0;1]$ системы (1).

При этом $y(0) = x(t_0) = x_0$.

Следовательно, задача Коши (CD)-(t_0, x_0) вдоль вектора v является задачей Коши (1)-$(0, x_0)$.

Поскольку $X \in C^1(\mathcal{D})$, то задача Коши (1)-$(0, x_0)$ имеет единственное решение. Значит, задача Коши (CD)-(t_0, x_0) вдоль любого в пространстве $\mathbb{R}^m$ вектора постоянной нормы r с точкой приложения t_0 разрешается однозначно.

Поэтому на замкнутом шаре $\mathrm{D}_r^m(t_0)$ решение задачи Коши (CD)-(t_0, x_0) единственное. ■

2.2. Необходимые условия полной разрешимости.

Лемма 1. *Если система* (CD) *при* $X \in C^1(\mathcal{D})$ *вполне разрешима на области* $\mathcal{D}$, *то*

$$\begin{gathered}\partial_{t_j} X_{i\zeta} + \sum_{\xi=1}^{n} X_{\xi j}\partial_{x_\xi} X_{i\zeta} = \partial_{t_\zeta} X_{ij} + \sum_{\xi=1}^{n} X_{\xi\zeta}\partial_{x_\xi} X_{ij},\\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,,\ \zeta = \overline{1,m}\,.\end{gathered} \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x\colon t \to x(t),\ \forall t \in \mathrm{U}(t_0)$, является решением задачи Коши (CD)-(t_0, x_0) с произвольными начальными данными $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$.

Из условия $X \in C^1(\mathcal{D})$ и тождества

$$dx(t) = X(t, x(t))\, dt,\ \forall t \in \mathrm{U}(t_0),$$

следует, что функция-решение x дважды непрерывно дифференцируема на окрестности $\mathrm{U}(t_0)$. Значит, на $\mathrm{U}(t_0)$ вторые смешанные производные функции-решения x совпадают:

$$\partial_{t_j t_\zeta} x_i(t) = \partial_{t_\zeta t_j} x_i(t), \ \forall t \in \mathrm{U}(t_0), \ i = \overline{1,n}\,, \ j = \overline{1,m}\,, \ \zeta = \overline{1,m}\,.$$

Вторая смешанная производная

$$\partial_{t_j t_\zeta} x_i(t) = \partial_{t_\zeta}\Big(\partial_{t_j} x_i(t)\Big) = \partial_{t_\zeta} X_{ij}(t, x(t)) =$$

$$= \partial_{t_\zeta} X_{ij}(t,x)\big|_{x=x(t)} + \sum_{\xi=1}^{n} \partial_{x_\xi} X_{ij}(t,x)\big|_{x=x(t)} \cdot \partial_{t_\zeta} x_\xi(t) =$$

$$= \Big(\partial_{t_\zeta} X_{ij}(t,x) + \sum_{\xi=1}^{n} X_{\xi\zeta}(t,x)\cdot \partial_{x_\xi} X_{ij}(t,x)\Big)\Big|_{x=x(t)}, \ \forall t \in \mathrm{U}(t_0),$$

поэтому

$$\Big(\partial_{t_j} X_{i\zeta}(t,x) + \sum_{\xi=1}^{n} X_{\xi j}(t,x)\partial_{x_\xi} X_{i\zeta}(t,x)\Big)\Big|_{x=x(t)} =$$

$$= \ \Big(\partial_{t_\zeta} X_{ij}(t,x) + \sum_{\xi=1}^{n} X_{\xi\zeta}(t,x)\partial_{x_\xi} X_{ij}(t,x)\Big)\Big|_{x=x(t)},$$

$$\forall t \in \mathrm{U}(t_0), \ i = \overline{1,n}\,, \ j = \overline{1,m}\,, \ \zeta = \overline{1,m}\,.$$

Отсюда, ввиду выбора точки (t_0, x_0) в области $\mathcal{D}$ произвольным образом, следует система тождеств (2). ■

Необходимые условия полной разрешимости (2) будем называть *условиями Фробениуса* относительно системы (CD).

Система (CD) индуцирует m линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(t,x)\partial_{x_i}, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}, \ j = \overline{1,m}\,, \qquad (3)$$

которые назовём *операторами дифференцирования в силу си-*

стемы (CD), а их действия будем называть *производными Ли в силу системы* (CD).

Условия Фробениуса (2) посредством операторов (3) с помощью скобок Пуассона выражаются системой тождеств

$$\big[\mathfrak{X}_j(t,x), \mathfrak{X}_\zeta(t,x)\big] = \mathfrak{O},\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ j = \overline{1,m}\,,\ \zeta = \overline{1,m}\,. \tag{4}$$

2.3. Интегральная система задачи Коши. Пусть для системы (CD) выполняются условия Фробениуса (2) и поставлена задача Коши с начальными данными (t_0, x_0).

При выполнении условий (2) векторная дифференциальная 1-форма $X(t, x(t))\,dt$ является замкнутой на любой односвязной области $\mathcal{B}$, содержащейся в $\mathcal{T}$.

По теореме Пуанкаре, эта 1-форма будет точной на $\mathcal{B}$.

Тогда векторный криволинейный интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} X(\tau, x(\tau))\,d\tau$ в области $\mathcal{B}$ не зависит от пути интегрирования.

Это позволяет на $\mathcal{B}$ построить интегральную систему

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(\tau, x(\tau))\,d\tau. \tag{5}$$

Определение 1. *Решением на односвязной области* $\mathcal{B}$, *содержащейся в области* $\mathcal{T}$, *интегральной системы* (5) *при выполнении условий Фробениуса* (2) *назовём векторную функцию векторного аргумента* $x\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$, *такую, что*:

1) *функция* x *непрерывно дифференцируема на* $\mathcal{B}$;

2) *точки* $(t, x(t)) \in \mathcal{D},\ \forall t \in \mathcal{B}$;

3) *точка* $t_0 \in \mathcal{B}$ *и выполняется матричное тождество*

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(\tau, x(\tau))\,d\tau,\ \forall t \in \mathcal{B}. \tag{6}$$

То, что итегральная система (5) рассматривается в окрестности точки t_0, обосновано тем, что она составлена в связи с задачей Коши (CD)-(t_0, x_0).

Лемма 2. *Пусть матрица* $X \in C^1(\mathcal{D})$ *и выполняются условия Фробениуса* (2), *а односвязная область* $\mathcal{B}$ *содержится в области* $\mathcal{T}$. *Тогда функция* $x\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ *является решением на области* $\mathcal{B}$ *задачи Коши* (CD)-(t_0, x_0), *если и только если она является решением на этой области интегральной системы* (5).

Доказательство. Необходимость. Пусть $x\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ есть решение задачи Коши (CD)-(t_0, x_0) на односвязной области $\mathcal{B}$.

Тогда имеет место матричное тождество

$$dx(t) = X(t, x(t))\, dt, \ \forall t \in \mathcal{B}. \tag{7}$$

Учитывая независимость от пути интегрирования криволинейного интеграла $\int\limits_{t_0}^{t} X(\tau, x(\tau))\, d\tau$ в области $\mathcal{B}$, интегрированием тождества (7) по пути от t_0 до t, целиком лежащем в этой области, с учётом условия $x(t_0) = x_0$, получаем тождество (6).

Тем самым, устанавливаем, что функция $x\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$, будучи решением задачи Коши (CD)-(t_0, x_0), является решением интегральной системы (5).

Достаточность. Пусть $x\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ есть решение на односвязной области интегральной системы (5) при выполнении условий Фробениуса (2).

Тогда имеет место тождество (6).

Дифференцируя это тождество по t, получаем тождество (7).

Стало быть, функция-решение x интегральной системы (5) является решением на области $\mathcal{B}$ системы (CD).

При этом из (6) при $t = t_0$ получаем, что $x(t_0) = x_0$.

Значит, x — решение задачи Коши (CD)-(t_0, x_0). ■

В соответствии с леммой 2 систему (5) назовём *интегральной системой задачи Коши* (CD)-(t_0, x_0).

2.4. Теорема Фробениуса.

Лемма 3. *Пусть матрица* $X \in C^1(\mathcal{D})$ *и выполняются условия Фробениуса* (2). *Тогда система* (CD) *вполне разрешима на области* $\mathcal{D}$.

Доказательство. Сначала докажем, что на достаточно малой окрестности точки t_0 интегральная система (5) имеет единственное решение.

Матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$, и следовательно, удовлетворяет условию Липшица по x в области $\mathcal{D}$ локально: $X \in \mathrm{Lip}_x(\mathcal{D})\mathrm{loc}$.

Тогда у точки (t_0, x_0) из $\mathcal{D}$ существует такая окрестность U_0, $\mathrm{U}_0 = \mathrm{U}(t_0, x_0)$, $\mathrm{U}_0 \subset \mathcal{D}$, что сужения всех функций-элементов X_{ij} матрицы X на окрестности U_0 ограничены

$$\exists M > 0\colon\ |X_{ij}(t,x)| \leqslant M,\ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0,\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{8}$$

и удовлетворяют условию Липшица на U_0 по x глобально

$$|X_{ij}(t,x'') - X_{ij}(t,x')| \leqslant L \max_{\xi=\overline{1,n}} \left|x''_\xi - x'_\xi\right|,$$

$$\forall (t,x'),\ (t,x'') \in \mathrm{U}_0,\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{9}$$

$$x' = (x'_1, \ldots, x'_n)\,,\ x'' = (x''_1, \ldots, x''_n)\,,\ \ L > 0.$$

Положительное число δ подберём так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) точки $(t,x) \in \mathrm{U}_0$ при

$$\|t - t_0\| \leqslant \delta,\ \left|x_\xi - x^0_\xi\right| \leqslant mM\delta,\ \xi = \overline{1,n}\,;$$

2) $mL\delta < 1$.

Выполнения этих требований всегда можно добиться, выбрав окрестность U_0 точки (t_0, x_0) достаточно малой.

Пусть $\mathbb{V}$ есть множество функций $x\colon t \to x(t)$, непрерывных на параллелепипеде $\Pi = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{m} \left[t^0_j - \delta;\ t^0_j + \delta\right]$, таких, что

$$\left|x_\xi(t) - x^0_\xi\right| \leqslant mM\delta \quad \text{при} \quad \|t - t_0\| \leqslant \delta,\ \xi = \overline{1,n}\,. \tag{10}$$

На множестве $\mathbb{V}$ введём метрику по формуле

$$\rho(x', x'') = \max_{\xi=\overline{1,n}} \left\{\left|x'_\xi(t) - x''_\xi(t)\right| : t \in \Pi\right\},\ \forall x' \in \mathbb{V},\ \forall x'' \in \mathbb{V}.$$

Множество $(\mathbb{V}, \rho)$ является полным метрическим пространством как метрическое пространство непрерывных на параллелепипеде функций.

Системой интегральных равенств

$$y_i(t) = x_i^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(\tau, x(\tau))\, d\tau_j\,, \ \forall t \in \Pi, \ i = \overline{1, n}\,, \qquad (11)$$

определим отображение $Y\colon x \to Y(x), \forall x \in \mathbb{V},$ которое будет отображением полного метрического пространства $\mathbb{V}$ в себя.

В самом деле, функции

$$y\colon t \to \bigl(y_1(t), \ldots, y_n(t)\bigr), \ \forall t \in \Pi, \qquad (12)$$

заданные формулами (11) на основании функций $x\colon \Pi \to \mathbb{R}^n$ из полного пространства $(\mathbb{V}, \rho),$ непрерывны на параллелепипеде Π (функции $x\colon \Pi \to \mathbb{R}^n$ и матрица X непрерывны).

Кроме того, из представлений (11), ограничений (8) и принадлежности функций $x\colon \Pi \to \mathbb{R}^n$ пространству $(\mathbb{V}, \rho),$ следует, что при $\|t - t_0\| \leqslant \delta$ имеют место оценки

$$\bigl|y_\xi(t) - x_\xi^0\bigr| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(\tau, x(\tau))\, d\tau_j \right| \leqslant mM\delta, \ \ \xi = \overline{1, n}\,.$$

Итак, функции (12) удовлетворяют условию (10), а значит, являются элементами полного метрического пространства $\mathbb{V}.$

Поэтому $Y,$ заданное равенствами (11), является отображением $\mathbb{V}$ в себя.

Докажем, что отображение $Y\colon x \to Y(x), \forall x \in \mathbb{V},$ определяемое интегральными равенствами (11), является сжимающим отображением полного метрического пространства $\mathbb{V}.$

С учётом условий Липшица (9) модуль разности координат образов этого отображения при каждом $\xi = \overline{1, n}$ на Π

$$\bigl|y''_\xi - y'_\xi\bigr| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \bigl|X_{ij}(\tau, x''(\tau)) - X_{ij}(\tau, x'(\tau))\bigr|\, d\tau_j \right| \leqslant$$

$$\leqslant mL\delta\rho(x', x'').$$

Стало быть,

$$\rho(Y(x'), Y(x'')) \leqslant mL\delta\rho(x', x''), \ \forall x' \in \mathbb{V}, \ x'' \in \mathbb{V}.$$

А поскольку $mL\delta < 1$, то Y — сжимающее отображение $\mathbb{V}$ в себя.

Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.

Это означает, что интегральная система (5) имеет единственное решение.

В соответствии с леммой 2 задача Коши (CD)-(t_0, x_0) имеет единственное решение. Начальные данные (t_0, x_0) в области $\mathcal{D}$ выбраны произвольным образом. Поэтому система (CD) является вполне разрешимой на области $\mathcal{D}$. ■

Лемма 1 (выражает необходимое условие полной разрешимости) и лемма 3 (выражает достаточное условие полной разрешимости) составляют

Теорема 2 (*Ф.Г. Фробениуса*). *Если матрица* $X \in C^1(\mathcal{D})$, *то система* (CD) *вполне разрешима на области* $\mathcal{D}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия Фробениуса* (2).

Если учесть теорему 1, то условия Фробениуса можно рассматривать как критерий существования решения задачи Коши

Теорема 3. *Задача Коши* (CD)-(t_0, x_0) *при* $X \in C^1(\mathcal{D})$ *имеет решение, если и только если на некоторой окрестности точки* (t_0, x_0) *выполняются условия Фробениуса, причём решение этой задачи Коши будет единственным.*

Глава I

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПОСЛЕДНИЕ МНОЖИТЕЛИ

§ 1. Базис первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах

1. Первый интеграл

Первый интеграл. Критерий существования первого интеграла у вполне разрешимой системы.

Пусть у системы (CD) матрица $X \in C(\mathcal{D})$, то есть, все её элементы X_{ij} — непрерывные на области $\mathcal{D}$ функции.

Определение 1. *Непрерывно дифференцируемую на подобласти $\mathcal{D}'$ области $\mathcal{D}$ скалярную функцию векторного аргумента $F\colon \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ назовём* ***первым интегралом на области*** *$\mathcal{D}'$ системы* (CD) *при $X \in C(\mathcal{D})$, если дифференциал функции F в силу системы* (CD) *тождественно равен нулю на области $\mathcal{D}'$*:

$$dF(t,x)\big|_{(\mathrm{CD})} = 0, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}'. \tag{1}$$

Дифференциал функции F в силу системы (CD) равен

$$dF(t,x)\big|_{(\mathrm{CD})} = \sum_{j=1}^{m} \partial_{t_j} F(t,x)\, dt_j + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F(t,x)\, dx_i\big|_{(\mathrm{CD})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Bigl(\partial_{t_j} F(t,x) + \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(t,x) \partial_{x_i} F(t,x)\Bigr) dt_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{X}_j F(t,x)\, dt_j, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',$$

где $\mathfrak{X}_j$ — операторы (3.2.2.0).

Это представление позволяет тождество (1) записать в виде операторной системы тождеств

$$\mathfrak{X}_j F(t,x) = 0,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',\ j = \overline{1,m}\,, \tag{2}$$

а также является обоснованием того, что линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{X}_j$ были названы операторами дифференцирования в силу системы (CD).

В случае полной разрешимости системы уравнений в полных дифференциалах имеет место следующий *критерий существования первого интеграла*, который следует из тождества (1).

Теорема 1. *Функция* $F\colon \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ *является первым интегралом на области* $\mathcal{D}'$ *из* $\mathcal{D}$, *системы* (ICD) *при* $X \in C(\mathcal{D})$, *если и только если эта функция, будучи непрерывно дифференцируемой на области* $\mathcal{D}'$, *сохраняет постоянное значение вдоль любого решения* $x\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{X}'$, $\mathcal{T}'\times\mathcal{X}' = \mathcal{D}'$, *системы* (ICD): $F(t,x(t)) = C$, $\forall t \in \mathcal{T}'$, $C = \mathrm{const}$.

Что касается не являющихся вполне разрешимыми на области $\mathcal{D}$ систем (CD), то они могут иметь первые интегралы даже в случаях, когда у них нет решений.

Пример 1. Система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_1 = x_1\, dt_1 + 3x_1\, dt_2,\ \ dx_2 = (1 + x_1 + 2x_2)\, dt_1 + (x_1 + 3x_2)\, dt_2 \tag{3}$$

в соответствии с определением 1 имеет первый интеграл

$$F\colon (t,x) \to x_1 \exp\bigl(-(t_1 + 3t_2)\bigr),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4. \tag{4}$$

А по теореме 3.2.2.0 у системы (3) нет решений, так как скобки Пуассона

$$\bigl[\mathfrak{X}_1(t,x), \mathfrak{X}_2(t,x)\bigr] =$$

$$= \Bigl[\partial_{t_1} + x_1\partial_{x_1} + (1 + x_1 + 2x_2)\partial_{x_2},\, \partial_{t_2} + 3x_1\partial_{x_1} + (x_1 + 3x_2)\partial_{x_2}\Bigr] =$$

$$= (3 - x_1)\partial_{x_2},\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

не является нуль-оператором ни на какой области из $\mathbb{R}^4$.

На протяжении всей главы, говоря о системе (CD), будем иметь в виду, что матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$. В этом случае условия Фробениуса (4.2.2.0) являются критерием (теорема 2.2.2.0) полной разрешимости на области $\mathcal{D}$ системы (CD).

2. Базис первых интегралов

Функциональная неоднозначность первого интеграла. Базис первых интегралов и его размерность.

На подобласти $\mathcal{D}'$ области $\mathcal{D}$ рассмотрим совокупность k непрерывно дифференцируемых скалярных функций

$$F_s\colon \mathcal{D}' \to \mathbb{R},\ s = \overline{1,k}\,, \tag{1}$$

и вектор-функцию

$$F\colon (t,x) \to \big(F_1(t,x),\ldots,F_k(t,x)\big),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}'.$$

Теорема 1. *Если функции* (1) *есть первые интегралы на области* $\mathcal{D}'$ *системы* (CD)*, то функция*

$$\Psi\colon (t,x) \to \Phi(F(t,x)),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}', \tag{2}$$

где Φ *— произвольная непрерывно дифференцируемая на области* $\mathrm{E}F$ *функция, также является первым интегралом на области* $\mathcal{D}'$ *системы* (CD).

Доказательство. В соответствии с определением первого интеграла выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_j F_s(t,x) = 0,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',\ j = \overline{1,m}\,,\ s = \overline{1,k}\,.$$

Тогда у произвольной скалярной функции Φ, непрерывно дифференцируемой на множестве значений $\mathrm{E}F = \mathop{\times}\limits_{s=1}^{k} \mathrm{E}F_s$, производные Ли на области $\mathcal{D}'$ в силу системы (CD)

$$\mathfrak{X}_j \Phi(F(t,x)) = \sum_{s=1}^{k} \partial_{F_s} \Phi(F)\big|_{F=F(t,x)}\, \mathfrak{X}_j F_s(t,x) = 0,\ j = \overline{1,m}\,.$$

Следовательно, функция (2) является первым интегралом на области $\mathcal{D}'$ системы (CD). ■

Эта теорема выражает *функциональную неоднозначность первого интеграла* системы уравнений в полных дифференциалах: *если функция* $F_1\colon \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ *является первым интегралом на области* $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, *системы* (CD)*, то и функция*

$$\Psi_1\colon (t,x) \to \Phi(F_1(t,x)),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',$$

где Φ *— произвольная непрерывно дифференцируемая на области* $\mathrm{E}F_1$ *функция, будет первым интегралом на области* $\mathcal{D}'$ *этой системы.*

Данное обстоятельство устанавливает приоритет первых интегралов, которые функционально не зависят на области $\mathcal{D}'$. При этом ставятся задачи о существовании и количестве функционально независимых первых интегралов у системы (CD).

Определение 1. *Совокупность функционально независимых на области* $\mathcal{D}'$ *первых интегралов* (1) *системы* (CD) *назовём* ***базисом первых интегралов*** *на области* $\mathcal{D}'$, *если для любого первого интеграла* $\Psi\colon \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ *этой системы имеет место представление*

$$\Psi(t,x) = \Phi(F_1(t,x), \ldots, F_k(t,x)),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',$$

где Φ *— некоторая непрерывно дифференцируемая на области* $\mathrm{E}F$ *функция. Число* k *при этом назовём* ***размерностью*** *базиса первых интегралов на подобласти* $\mathcal{D}'$ *области* $\mathcal{D}$ *системы* (CD).

3. Размерность базиса первых интегралов вполне разрешимой системы

Изменение начальных данных вдоль решения. Локальное существование функционально независимых первых интегралов у вполне разрешимой системы. Общий вид первого интеграла вполне разрешимой системы. Локальный базис первых интегралов вполне разрешимой системы.

Систему (CD) будем рассматривать, когда она является голоморфной, то есть, функции $X_{ij}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,,$ голоморфны на области $\mathcal{D}$.

Для голоморфной системы (ICD), по теореме Коши, у каждой точки t_0 области $\mathcal{T}$ существует окрестность, на которой решение системы (ICD) голоморфно. Более того, решения системы (ICD) голоморфно зависят от начальных данных.

Лемма 1. *Пусть* $x\colon t \to x(t;(t_0,x_0)), \forall t \in \mathcal{T}',\ t_0 \in \mathcal{T}'$, *есть решение на некоторой односвязной области* $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, *голоморфной системы* (ICD). *Тогда для любой точки* t_* *из области* $\mathcal{T}'$ *решение* $x\colon t \to x(t;(t_*,x_*))$,

$\forall t \in \mathcal{T}',$ *системы* (ICD) *при* $x_* = x(t_*; (t_0, x_0))$ *такое, что* $x(t_0; (t_*, x(t_*; (t_0, x_0)))) = x_0.$

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}$ и $\widetilde{\widetilde{x}}$ есть решения соответствующих задач Коши системы (ICD):

$$\widetilde{x}\colon t \to x(t; (t_0, x_0)), \forall t \in \mathcal{T}',$$

и

$$\widetilde{\widetilde{x}}\colon t \to x(t; (t_*, x(t_*; (t_0, x_0)))), \forall t \in \mathcal{T}'.$$

Их значения $\widetilde{x}(t_*) = \widetilde{\widetilde{x}}(t_*).$

Тогда в односвязной области $\mathcal{T}',$ которой принадлежат точки t_0 и $t_*,$ по теореме Коши, имеем:

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{\widetilde{x}}(t),\ \forall t \in \mathcal{T}'.$$

Поэтому

$$\widetilde{\widetilde{x}}(t_0) = \widetilde{x}(t_0) = x_0,$$

что в принятых обозначениях соответствует равенству

$$x(t_0; (t_*, x(t_*; (t_0, x_0)))) = x_0. \blacksquare$$

Предложение 1. *Если для голоморфной системы* (ICD) *в окрестности точки* (t_0, x_0) *из области* $\mathcal{D}$ *выполняются условия теоремы Коши, то эта система имеет* n *функционально независимых на некоторой окрестности точки* (t_0, x_0) *первых интегралов.*

Доказательство. Пусть $x\colon t \to x(t; (t_0, x_0)),\ \forall t \in \mathcal{T}',$ есть решение системы (ICD), когда область $\mathcal{T}' \ni t_0.$ А функция

$$F\colon (t, x) \to x(t_0; (t, x)),\ \forall (t, x) \in \mathrm{U}_0,\ \mathrm{U}_0 = \mathrm{U}((t_0, x_0)),$$

при

$$x(t; (t_0, x_0)) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (t - t_0)^k,\ \forall t \in \mathrm{U}(t_0),$$

такова, что

$$F(t, x) = x(t_0; (t, x)) = x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (t_0 - t)^k,\ \forall (t, x) \in \mathrm{U}_0.$$

Согласно голоморфности решений задачи Коши по начальным данным, функция F голоморфна на окрестности U_0.

Матрица Якоби по x в точке (t_0, x_0) является единичной:

$$\partial_x F(t,x)\big|_{(t_0,x_0)} = E.$$

Значит, существует окрестность U_0, на которой определитель

$$\det \partial_x F(t,x) \neq 0,\ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0.$$

Тем самым установлена функциональная независимость по x на U_0 координатных функций $F_i \colon \mathrm{U}_0 \to \mathbb{R},\, i = \overline{1,n}$, вектора-функции F.

В соответствии с леммой 1

$$F(t, x(t;(t_0,x_*))) = x(t_0;(t, x(t;(t_0,x_*)))) = x_*,$$

а значит, функция F суть постоянный вектор вдоль решений системы (ICD).

Тогда по теореме 1.1 функции

$$F_i \colon (t,x) \to F_i(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{1}$$

будут первыми интегралами на U_0 системы (ICD). ■

Предложение 2. *Пусть голоморфная система* (ICD) *имеет n функционально независимых на окрестности U_0 точки (t_0, x_0) первых интегралов* (1). *Тогда для всякого первого интеграла $\Psi \colon \mathrm{U}_0 \to \mathbb{R}$ системы* (ICD) *имеет место представление*

$$\Phi(F(t,x)) = C,\ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0,$$

где C — постоянная, Φ — некоторая функция, голоморфная на множестве значений $\mathrm{E}F = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \mathrm{E}F_i$, вектор-функция

$$F(t,x) = (F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x)),\ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0.$$

Доказательство. У определяемых первыми интегралами (1) системы (ICD) функций

$$F_i \colon (t,x) \to x_i(t_0;(t,x)),\ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0,\ i = \overline{1,n}\,,$$

якобиан

$$\det \partial_x F(t,x) \neq 0, \ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0.$$

Поэтому при фиксированном t функция F имеет обратную функцию S и

$$F(t, S(t,x)) = x, \ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0. \tag{2}$$

При этом функция

$$\Phi\colon (t,x) \to \Psi(t, S(t,x)), \ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0,$$

с первыми интегралами связана тождеством

$$\Psi(t,x) = \Phi(t, F(t,x)), \ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0.$$

Докажем, что на U_0 функция Φ не зависит от t :

$$\partial_{t_j} \Phi(t,x) = 0, \ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0, \ j = \overline{1,m}\,.$$

Для этого тождество (2) продифференцируем по t на U_0:

$$\partial_{t_j} F(t, S(t,x)) + \partial_x F(t, S(t,x)) \partial_{t_j} S(t,x) = 0, \ j = \overline{1,m}\,.$$

Функции (1) — первые интегралы системы (ICD). Поэтому

$$\partial_{t_j} F(t,x) = \ - \partial_x F(t,x) X^j(t,x), \ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0, \ j = \overline{1,m}\,,$$

где $X^j(t,x) = (X_{1j}(t,x), \ldots, X_{nj}(t,x)), \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}, \ j = \overline{1,m}\,.$

Тогда на окрестности U_0

$$\partial_x F(t, S(t,x)) \Big(\partial_{t_j} S(t,x) - X^j(t, S(t,x)) \Big) \equiv 0, \ j = \overline{1,m}\,,$$

а значит,

$$\partial_{t_j} S(t,x) = X^j(t, S(t,x)), \ \forall (t,x) \in \mathrm{U}_0, \ j = \overline{1,m}\,,$$

так как матрица $\partial_x F$ невырождена на U_0.

С учётом того, что функция Ψ — первый интеграл системы (ICD), на U_0 имеем:

$$\partial_{t_j}\Phi(t,x) = \partial_{t_j}\Psi(t,S(t,x)) + \partial_x\Psi(t,S(t,x))\partial_{t_j}S(t,x) =$$

$$= \partial_{t_j}\Psi(t,S(t,x)) + \partial_x\Psi(t,S(t,x))X^j(t,S(t,x)) \equiv 0,\ j=\overline{1,m}\,. \blacksquare$$

Из предложений 1 и 2 следует

Теорема 1. *Голоморфная система* (ICD) *на окрестности любой точки области* $\mathcal{D}$ *имеет базис первых интегралов размерности* n.

Пример 1. Вполне разрешимая система

$$\begin{aligned} dx_1 &= dt_1,\ \ dx_2 = dt_2, \\ dx_3 &= \partial_{x_1}g(x_1,x_2)\,dt_1 + \partial_{x_2}g(x_1,x_2)\,dt_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где скалярная функция g голоморфна на области $\mathcal{X}$ из $\mathbb{R}^2$, имеет базис первых интегралов

$$F_1\colon (t,x)\to t_1-x_1,\ \ F_2\colon (t,x)\to t_2-x_2,$$

$$F_3\colon (t,x)\to g(x_1,x_2)-x_3$$

на односвязной области $\mathbb{R}^2\times\mathcal{X}\times\mathbb{R}$.

§2. Первые интегралы линейной однородной системы уравнений в частных производных

1. Базис первых интегралов

Линейная однородная система уравнений в частных производных. (∂). Первый интеграл. Приведение линейной однородной системы уравнений в частных производных, заданной посредством линейно связанных операторов, к равносильной линейной однородной системе уравнений в частных производных, заданной с помощью линейных операторов, неявляющихся голоморфно линейно связанными. Первые интегралы в случае, когда количество уравнений совпадает с количеством независимых переменных. Соотношение между количеством независимых переменных и количеством уравнений, образующих систему. Функциональная неоднозначность первого интеграла. Базис первых интегралов и его размерность.

Дифференциальную систему

$$\mathfrak{L}_j(x)y = 0,\ j = \overline{1, m}\,, \tag{∂}$$

где линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{L}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}(x)\partial_i,\ \forall x \in \mathfrak{X},\ \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,, \tag{1}$$

назовём *линейной однородной системой уравнений в частных производных первого порядка.*

Рассматривать систему (∂) будем в предположении, что координатные функции u_{ji} достаточное число раз непрерывно дифференцируемы на области $\mathfrak{X}$.

Определение 1. *Непрерывно дифференцируемую на области $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$, скалярную функцию $F\colon \mathfrak{X}' \to \mathbb{R}$ назовём* ***первым интегралом на области*** $\mathfrak{X}'$ *системы* (∂), *если*

$$\mathfrak{L}_j F(x) = 0,\ \forall x \in \mathfrak{X}',\ \mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X},\ j = \overline{1, m}\,. \tag{2}$$

Условимся, что линейные дифференциальные операторы (1), посредством которых задана система (∂), не являются линейно связанными на области $\mathcal{X}$.

Это требование в общем не сужает множество всех возможных систем (∂).

Действительно, пусть совокупность операторов (1) линейно связана на области $\mathcal{X}$. Тогда матрица

$$u(x) = \|u_{ji}(x)\|_{m\times n}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3}$$

имеет ранг

$$\operatorname{rank} u(x) = s(x),\ 0 \leqslant s(x) < \min\{m, n\},\ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Выделим $s = \max\limits_{\mathcal{X}} s(x)$ операторов совокупности (1), которые не будут линейно связанными на такой подобласти $\mathcal{X}'$ области $\mathcal{X}$, что дополнение $\complement_{\mathcal{X}}\mathcal{X}'$ имеет нулевую меру.

По этим операторам построим новую линейную однородную систему уравнений в частных производных, которая на области $\mathcal{X}'$ интегрально равносильна исходной системе (∂), но задана уже линейными дифференциальными операторами, не являющимися линейно связанными.

Пусть операторы (1) не являются линейно связанными на области $\mathcal{X}$. Тогда матрица (3) почти везде на области $\mathcal{X}$ имеет ранг

$$\operatorname{rank} u(x) = m,\ \forall x \in \mathcal{X}',$$

где множество $\mathcal{X}'$ такое, что у его дополнения до множества $\mathcal{X}$ мера $\mathrm{m}\,\complement_{\mathcal{X}}\mathcal{X}' = 0$. И по необходимости будем считать $m \leqslant n$.

Если $m = n$, то не являющиеся линейно связанными на области $\mathcal{X}$ операторы (1) предопределяют невырожденность почти везде на области $\mathcal{X}$ квадратной матрицы (3) порядка n. В этом случае систему (∂) с помощью алгебраических преобразований на подобласти $\mathcal{X}'$ области $\mathcal{X}$ приводим к виду

$$\partial_i y = 0,\ i = \overline{1, n}\,,$$

с первым интегралом

$$y\colon x \to C,\ \forall x \in \mathcal{X}',$$

где C — произвольная вещественная постоянная.

Предложение 1. *Если $m = n$, то система (∂) не имеет первых интегралов, отличных от тождественной постоянной.*

Поэтому основным объектом нашего внимания будут системы (∂) с не являющимися линейно связанными на области $\mathcal{X}$ операторами (1) при $m < n$.

Теорема 1. *Если функции $F_\xi\colon x \to F_\xi(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}'$, $\xi = \overline{1,k}$, являются первыми интегралами на подобласти $\mathcal{X}'$ области $\mathcal{X}$ системы (∂), то и функция $\Psi\colon x \to \Phi\big(F(x)\big)$, $\forall x \in \mathcal{X}'$, где $F(x) = \big(F_1(x), \ldots, F_k(x)\big)$, а Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, будет первым интегралом на области $\mathcal{X}'$ системы (∂).*

Действительно, на области $\mathcal{X}'$

$$\mathfrak{L}_j F_\xi(x) \equiv 0, \ j = \overline{1,m}\,, \ \xi = \overline{1,k}\,,$$

а значит, на области $\mathcal{X}'$

$$\mathfrak{L}_j \Phi\big(F(x)\big) = \sum_{\xi=1}^{k} \partial_{F_\xi} \Phi(F)\big|_{F=F(x)}\, \mathfrak{L}_j F_\xi(x) \equiv 0, \ j = \overline{1,m}\,. \blacksquare$$

Определение 2. *Совокупность функционально независимых на подобласти $\mathcal{X}'$ области $\mathcal{X}$ первых интегралов*

$$F_\xi\colon x \to F_\xi(x), \ \forall x \in \mathcal{X}', \ \xi = \overline{1,k}\,,$$

системы (∂) назовём ***базисом первых интегралов*** *на области $\mathcal{X}'$ системы (∂), если у этой системы любой первый интеграл $\Psi\colon \mathcal{X}' \to \mathbb{R}$ можно представить в виде*

$$\Psi(x) = \Phi\big(F_1(x), \ldots, F_k(x)\big), \ \forall x \in \mathcal{X}',$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Число k при этом назовём ***размерностью*** *базиса первых интегралов.*

2. Основные классы систем

Полная система. Якобиева система. Полнота якобиевой системы. Нормальная система. ($\mathrm{N}\partial$). *Якобиевость полной нормальной системы.*

Определение 1. *Систему* (∂) *назовём* ***полной*** *на области* $\mathcal{X}$, *если скобки Пуассона любых двух её операторов* (1.1) *представимы в виде линейной комбинации операторов* $\mathfrak{L}_j,\ j = \overline{1,m}$, *с коэффициентами, непрерывно дифференцируемыми на* $\mathcal{X}$:

$$\big[\mathfrak{L}_j(x), \mathfrak{L}_l(x)\big] = \sum_{s=1}^{m} A_{jls}(x)\mathfrak{L}_s(x),\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{1}$$

при $j = \overline{1,m}\,,\ l = \overline{1,m}\,.$

Определение 2. *Если скобки Пуассона операторов* (1.1) *симметричны на области* $\mathcal{X}$, *то систему* (∂) *назовём* ***якобиевой*** *на этой области.*

Предложение 1. *Якобиевая на области* $\mathcal{X}$ *система* (∂) *является полной на этой области.*

Доказательство. Симметричность на области $\mathcal{X}$ скобок Пуассона операторов (1.1) равносильна тому, что

$$\big[\mathfrak{L}_j(x), \mathfrak{L}_l(x)\big] = \mathfrak{O},\ \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1,m}\,,\ l = \overline{1,m}\,. \tag{2}$$

Тождества (2) есть представления (1), у которых все коэффициенты $A_{jls}(x) = 0,\ \forall x \in \mathcal{X}.$ ■

Определение 3. *Дифференциальную систему*

$$\partial_j y = \mathfrak{M}_j(x) y,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{N∂}$$

где

$$\mathfrak{M}_j(x) = \sum_{s=m+1}^{n} u_{js}(x)\partial_s,\ \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1,m}\,, \tag{3}$$

назовём ***нормальной*** *линейной однородной системой уравнений в частных производных.*

Предложение 2. *Полная нормальная система якобиева.*

Доказательство. Система $(\mathrm{N}\partial)$ является системой вида (∂), у которой операторы

$$\mathfrak{L}_j(x) = \partial_j - \mathfrak{M}_j(x),\ \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1,m}\,.$$

А на области $\mathcal{X}$ скобки Пуассона

$$\big[\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l\big] = \big[\partial_j - \mathfrak{M}_j, \partial_l - \mathfrak{M}_l\big] = \big[\partial_j, \partial_l - \mathfrak{M}_l\big] - \big[\mathfrak{M}_j, \partial_l - \mathfrak{M}_l\big] =$$
$$= -\big[\partial_j, \mathfrak{M}_l\big] - \big[\mathfrak{M}_j, \partial_l\big] + \big[\mathfrak{M}_j, \mathfrak{M}_l\big],\ j = \overline{1,m}\,,\ l = \overline{1,m}\,.$$

При этом если имеют место представления (1), то выполняются тождества (2). ■

3. Неполная система

Решения коммутаторного линейного однородного уравнения в частных производных. Система, дополненная коммутаторными уравнениями, и её решения. Дополнение неполной системы до полной. Дефект неполной системы.

Лемма 1. *Если функция* $y\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, *дважды непрерывно дифференцируемая на области* $\mathcal{X}$, *является первым интегралом системы* $\mathfrak{L}_1(x)y = 0,\ \mathfrak{L}_2(x)y = 0$, *то она будет первым интегралом уравнения*

$$\big[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)\big]y = 0.$$

Доказательство вытекает из определения скобок Пуассона, в соответствии с которым

$$\big[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2\big]y(x) = \mathfrak{L}_1\,\mathfrak{L}_2 y(x) - \mathfrak{L}_2\,\mathfrak{L}_1 y(x),\ \forall x \in \mathcal{X}. \blacksquare$$

Непосредственным следствием леммы 1 является

Лемма 2. *Если функция* $y \in C^2(\mathcal{X}')$ *является первым интегралом на области* $\mathcal{X}'$ *системы* (∂), *то она будет первым интегралом на этой области системы*

$$\mathfrak{L}_j(x)y = 0,\ \big[\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)\big]y = 0,$$
$$j = \overline{1,m}\,,\ \nu = \overline{1,m_1}\,,\ \mu = \overline{1,m_2}\,, \qquad (1)$$
$$m_1 \leqslant m,\ m_2 \leqslant m,\ j_\nu \in \{1,\dots,m\},\ l_\mu \in \{1,\dots,m\}.$$

Поскольку скобки Пуассона есть линейный дифференциальный оператор, то система (1) является линейной однородной.

Если система (∂) полная, то система (1) будет построенной на основании линейно связанных на области $\mathcal{X}$ операторов, даже если добавить к системе (∂) хотя бы одно уравнение вида

$$\bigl[\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)\bigr] y = 0, \ j_\nu \in \{1, \ldots, m\}, \ l_\mu \in \{1, \ldots, m\}. \qquad (2)$$

Если система (∂) неполная, то некоторые операторы

$$\mathfrak{L}_{\tau\theta}(x) = \bigl[\mathfrak{L}_\tau(x), \mathfrak{L}_\theta(x)\bigr], \ \tau \in \{1, \ldots, m\}, \ \theta \in \{1, \ldots, m\},$$

не являются линейной комбинацией операторов $\mathfrak{L}_j, \ j = \overline{1, m}$. Присоединив к системе (∂) уравнения

$$\mathfrak{L}_{\tau\theta}(x) y = 0,$$

где операторы $\mathfrak{L}_{\tau\theta}$ не являются линейной комбинацией операторов $\mathfrak{L}_j, \ j = \overline{1, m}$, составляем линейную однородную систему

$$\mathfrak{L}_s(x) y = 0, \ s = \overline{1, k_1}, \ m < k_1 \leqslant n, \qquad (3)$$

так что операторы $\mathfrak{L}_s, \ s = \overline{1, k_1}$, не являются линейно связанными на области $\mathcal{X}$.

Существенно, что:

1) $k_1 > m$, то есть, система (∂) пополняется хотя бы одним уравнением;

2) пополнение системы (∂) до системы (3) производится за счёт добавления уравнений вида (2);

3) системы (∂) и (3) интегрально равносильны на любой подобласти $\mathcal{X}'$ области $\mathcal{X}$.

Если система (3) полная, то процесс завершён.

Если же система (3) окажется неполной, то аналогичную процедуру проводим с системой (3) и получаем ещё одну систему.

Заметим, что после каждого такого шага количество уравнений системы увеличивается по крайней мере на одно. Поэтому, продолжая так далее, получим, после конечного числа шагов, или полную систему, или систему из n уравнений.

Учтём и такие обстоятельства. Во-первых, система (∂) при $m = n$ в соответствии с определением 1.2 относится к классу полных систем.

Это обосновано тем, что совокупность n линейных дифференциальных операторов, зависящих от n переменных и не являющихся линейно связанными на области $\mathcal{X}$ из n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, образует базис линейных дифференциальных операторов на области $\mathcal{X}$. Поэтому в результате описанной процедуры можно сказать, что всякая неполная система (∂) за конечное число шагов приводится к полной системе.

Во-вторых, приведение неполной системы (∂) к полной системе осуществляется путём добавления линейных однородных уравнений в частных производных видов

$$\begin{gathered}\bigl[\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)\bigr]y = 0, \ \Bigl[\mathfrak{L}_{\alpha_\xi}(x), \bigl[\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)\bigr]\Bigr]y = 0, \\ \Bigl[\mathfrak{L}_{\beta_\zeta}(x), \Bigl[\mathfrak{L}_{\alpha_\xi}(x), \bigl[\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)\bigr]\Bigr]\Bigr]y = 0, \dots,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\nu = \overline{1, m_1}\,,\ \mu = \overline{1, m_2}\,,\ \xi = \overline{1, m_3}\,,\ \zeta = \overline{1, m_4}\,, \dots,\ m_s \leqslant m,$$
$$s = 1, 2, \dots,\ \{1, \dots, m\} \ni j_\nu, l_\mu, \alpha_\xi, \beta_\zeta, \dots .$$

Всё это позволяет сделать следующий вывод:

Предложение 1. *Всякая неполная система* (∂) *на области* $\mathcal{X}$ *приводится к интегрально равносильной ей полной системе.*

В свою очередь эта закономерность предоставляет возможность ввести следующее понятие для неполных систем.

Определение 1. *Число* r *назовём* ***дефектом*** *неполной системы* (∂)*, если эта система на области* $\mathcal{X}$ *приводится к интегрально равносильной ей полной системе путём добавления* r *уравнений видов* (4).

В этом определении предполагается, что выполняется ранее оговоренное соглашение, по которому полная система, к которой приводится неполная система (∂), построена на основании не являющихся линейно связанными на области $\mathcal{X}$ операторов.

Очевидно, что для неполной системы (∂) дефект r такой, что

$$0 < r \leqslant n - m.$$

Если условиться, что полная система имеет дефект $r=0$, то относительно любой системы (∂) можно сказать, что она имеет дефект r при

$$0 \leqslant r \leqslant n-m.$$

4. Полная система

Инвариантность полной системы при голоморфизме. Инариантность якобиевой системы при голоморфизме. Инвариантность полноты системы при линейном невырожденном преобразовании операторов, посредством которых она задана. Приведение полной системы к локально равносильной полной нормальной (якобиевой) системе. Область нормализации. Неоднозначность области нормализации.

Свойство 1. *Полная линейная однородная система уравнений в частных производных инвариантна при голоморфизме.*

Доказательство. Пусть отображение

$$x\colon \xi \to \varphi(\xi),\ \forall \xi \in \widetilde{\mathcal{X}},\ \widetilde{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

устанавливает голоморфизм между областями $\mathcal{X}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}$ из $\mathbb{R}^n$. Выражение $\mathfrak{L}_j(x)y(x)$ инвариантно при голоморфизме (1):

$$\mathfrak{L}_j(x)y(x)\big|_{x=\varphi(\xi)} = \widetilde{\mathfrak{L}}_j(\xi)z(\xi),\ \forall \xi \in \widetilde{\mathcal{X}},\ \forall x \in \mathcal{X},\ j=\overline{1,m}\,, \tag{2}$$

где

$$z(\xi) = y(\varphi(\xi)),\ \forall \xi \in \widetilde{\mathcal{X}}.$$

Поэтому систему (∂) с помощью замены (1) приводим к системе

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_j(\xi)z = 0,\ j=\overline{1,m}\,. \tag{3}$$

Операторы $\widetilde{\mathfrak{L}}_j,\ j=\overline{1,m}\,$, ввиду взаимной однозначности голоморфизма не являются линейно связанными на области $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Докажем полноту системы (3) на области $\widetilde{\mathcal{X}}$ при условии, что система (∂) является полной на области $\mathcal{X}$.

С учётом (2) имеем:

$$\mathfrak{L}_j(x)\mathfrak{L}_l(x)y(x)\big|_{x=\varphi(\xi)} = \mathfrak{L}_j(x)v_l(x)\big|_{x=\varphi(\xi)} = \widetilde{\mathfrak{L}}_j(\xi)v_l(\varphi(\xi)) =$$

$$= \widetilde{\mathfrak{L}}_j(\xi)\widetilde{\mathfrak{L}}_l(\xi)z(\xi),\ \forall \xi \in \widetilde{\mathfrak{X}},\ \forall x \in \mathfrak{X},\ j = \overline{1,m}\,,\ l = \overline{1,m}\,,$$

где

$$v_l(x) = \mathfrak{L}_l y(x),\ \forall x \in \mathfrak{X},\ l = \overline{1,m}\,.$$

Поэтому

$$\big[\mathfrak{L}_j(x), \mathfrak{L}_l(x)\big]y(x)\big|_{x=\varphi(\xi)} = \Big[\widetilde{\mathfrak{L}}_j(\xi), \widetilde{\mathfrak{L}}_l(\xi)\Big]z(\xi),$$
$$\forall \xi \in \widetilde{\mathfrak{X}},\ j = \overline{1,m}\,,\ l = \overline{1,m}\,. \tag{4}$$

Для системы (∂) имеет место представление скобок Пуассона в виде (1.2).

Следовательно, на $\widetilde{\mathfrak{X}}$ при $j = \overline{1,m}\,,\ l = \overline{1,m}$

$$\Big[\widetilde{\mathfrak{L}}_j(\xi), \widetilde{\mathfrak{L}}_l(\xi)\Big]z(\xi) = \big[\mathfrak{L}_j(x), \mathfrak{L}_l(x)\big]y(x)\big|_{x=\varphi(\xi)} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} A_{jls}(x)\mathfrak{L}_s(x)y(x)\big|_{x=\varphi(\xi)} = \sum_{s=1}^{m} \widetilde{A}_{jls}(\xi)\widetilde{\mathfrak{L}}_s(\xi)z(\xi).\ \blacksquare$$

Из соотношений (2.2) и (4) имеем

Свойство 2. *Якобиева линейная однородная система уравнений в частных производных инвариантна при голоморфизме.*

Свойство 3. *Полная система* (∂) *с помощью линейной невырожденной на области* $\mathfrak{X}$ *замены операторов*

$$\mathfrak{L}_j(x) = \sum_{l=1}^{m} \psi_{jl}(x)\mathfrak{Q}_l(x),\ \forall x \in \mathfrak{X},\ j = \overline{1,m}\,, \tag{5}$$

где линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{Q}_l,\ l = \overline{1,m}\,,$ *и скалярные функции* $\psi_{jl}\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{R},\ j = \overline{1,m}\,,\ l = \overline{1,m}\,,$ *голо-*

морфны на области $\mathcal{X}$, *приводится в окрестности любой точки* $x \in \mathcal{X}$, *в которой* $\det\bigl\|\psi_{jl}(x)\bigr\| \ne 0$, *к интегрально равносильной ей полной системе разве что на сужении области* $\mathcal{X}$.

Доказательство. В силу невырожденности линейной замены (5) линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{Q}_l$, $l = \overline{1,m}$, линейным образом выражаются через операторы (1.1)

$$\mathfrak{Q}_l(x) = \sum_{j=1}^{m} \theta_{lj}(x)\mathfrak{L}_j(x), \ l = \overline{1,m}, \tag{6}$$

а система (∂) приводится к системе

$$\sum_{l=1}^{m} \psi_{jl}(x)\mathfrak{Q}_l(x)y = 0, \ j = \overline{1,m}, \tag{7}$$

и распадается на систему уравнений вида (∂)

$$\mathfrak{Q}_l(x)y = 0, \ l = \overline{1,m}. \tag{8}$$

При этом в разложении (6) происходит разве лишь сужение области $\mathcal{X}$ за счёт тех точек, в которых

$$\det\psi(x) = 0,$$

где $\psi(x) = \bigl\|\psi_{jl}(x)\bigr\|, \forall x \in \mathcal{X},$ — квадратная матрица порядка m.

Из представления (7) и невырожденности матрицы ψ следует интегральная равносильность на области $\mathcal{X}$ систем (8) и (∂).

Докажем полноту системы (8).

Пусть α и β — скалярные функции. На основании тождеств

$$\bigl[\alpha\mathfrak{L}_j, \beta\mathfrak{L}_l\bigr] = \alpha\beta\bigl[\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l\bigr] + \alpha\mathfrak{L}_j\,\beta\mathfrak{L}_l - \beta\mathfrak{L}_l\,\alpha\mathfrak{L}_j$$

и

$$\bigl[\mathfrak{K} + \mathfrak{L}, \mathfrak{M}\bigr] = \bigl[\mathfrak{K}, \mathfrak{M}\bigr] + \bigl[\mathfrak{L}, \mathfrak{M}\bigr]$$

с учётом (6) получаем, что

$$\big[\mathfrak{Q}_\mu, \mathfrak{Q}_\nu\big] = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} A_{jl}\big[\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l\big] + \sum_{s=1}^{m} B_s \mathfrak{L}_s,\ \mu = \overline{1,m}\,,\ \nu = \overline{1,m}\,.$$

Отсюда, используя соотношения (1.2) и замену (5), устанавливаем, что скобки Пуассона

$$\big[\mathfrak{Q}_\mu, \mathfrak{Q}_\nu\big],\ \mu = \overline{1,m}\,,\ \nu = \overline{1,m}\,,$$

представимы линейной комбинации операторов $\mathfrak{Q}_l,\ l = \overline{1,m}\,.$

Это означает полноту системы (8). ■

Из свойства 3 следует

Свойство 4. *Если система* (∂) — *полная, то система*

$$\mathfrak{K}_j(x)y = 0,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{9}$$

где

$$\mathfrak{K}_j(x) = \sum_{l=1}^{m} v_{jl}(x)\mathfrak{L}_l(x),\ \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1,m}\,, \tag{10}$$

а квадратная матрица m-го порядка $v(x) = \big\|v_{jl}(x)\big\|$ невырождена в области $\mathcal{X}$, также является полной и интегрально равносильна системе (∂) *на окрестности любой точки x области $\mathcal{X}$, в которой* $\det v(x) \neq 0$.

Теорема 1. *Полная система* (∂) *линейной невырожденной в области $\mathcal{X}$ заменой операторов* (1.1) *приводится к полной нормальной системе* (*при этом происходит разве лишь сужение области $\mathcal{X}$*).

Доказательство. Пусть система (∂) полная. Тогда квадратная матрица

$$\overset{*}{u}(x) = \big\|u_{ji}(x)\big\|,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

порядка m, составленная из первых m столбцов матрицы (3.1), является невырожденной на области $\mathcal{X}$ (чего добиваемся всегда перенумерованием переменных, ибо почти везде на области $\mathcal{X}$ матрица (3.1) имеет ранг $\operatorname{rank} u(x) = m$).

Это означает, что существует линейное невырожденное преобразование операторов (1.1), посредством которого систему (∂)

приводим к виду (N∂), то есть, к нормальной системе.

То, что полученная нормальная система является полной, следует из свойства 4. ■

Заметим, что, приводя систему (∂) к полной нормальной системе (N∂), по необходимости осуществляем деление на $\det \overset{*}{u}(x)$ (при построении линейного невырожденного преобразования операторов). Это могло повлечь сужение области $\mathcal{X}$ из-за удаления из неё точек, являющихся нулями определителя $\det \overset{*}{u}(x)$.

Если же в каждой точке области $\mathcal{X}$ определитель $\det \overset{*}{u}(x)$ не обращается в нуль, то сужение области $\mathcal{X}$ не происходит.

Из теоремы 1 и предложения 2.2 следует

Теорема 2. *Полная система* (∂) *линейной невырожденной на области* $\mathcal{X}$ *заменой операторов* (1.1) *приводится к якобиевой линейной однородной системе уравнений в частных производных* (*при этом происходит разве лишь сужение области* $\mathcal{X}$).

Относительно равносильности полной системы (∂) и полной нормальной системы, к которой она приводится, если учесть свойство 3 (или свойство 4) и процесс построения такой полной нормальной системы, описанный при доказательстве теоремы 1, можно утверждать

Теорема 3. *Пусть полная система* (∂) *такова, что квадратная матрица* $\widehat{u}$ *порядка* m, *составленная из* m *первых столбцов матрицы* (3.1), *является невырожденной на области* $\mathcal{X}$. *Тогда полная система* (∂) *приводится к полной нормальной системе вида* (N∂), *причём в окрестности любой точки* x *из области* $\mathcal{X}$, *в которой* $\det \widehat{u}(x) \neq 0$, *эти системы интегрально равносильны.*

Эта теорема и предложение 1.3 позволяют ввести

Определение 1. *Подобласть* $\mathcal{H}$ *области* $\mathcal{X}$ *назовём* ***областью нормализации*** *системы* (∂), *если в окрестности каждой точки области* $\mathcal{H}$ *система* (∂) *приводится к интегрально равносильной полной нормальной системе.*

При этом под областью нормализации неполной системы будем понимать область нормализации интегрально равносильной ей полной системы (см. предложение 1.3).

Область нормализации устанавливается, вообще говоря, неоднозначно. Она зависит от нулей определителей $\det \widehat{u}(x)$

квадратных матриц $\widehat{u}$ порядка m, составленных из m столбцов (не обязательно первых) матрицы (3.1).

Пример 1. Система

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}_1(x)y \equiv \sum_{i=1}^{5} x_i\partial_i y = 0,\\ \mathfrak{L}_2(x)y \equiv x_1\partial_1 y + x_2\partial_2 y + x_3\partial_3 y + x_4^2\partial_4 y + x_5^2\partial_5 y = 0\end{gathered} \tag{11}$$

неполная, так как скобки Пуассона

$$\bigl[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)\bigr] = x_4^2\partial_4 + x_5^2\partial_5 \equiv \mathfrak{L}_3(x)$$

не является линейной комбинацией операторов $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ на $\mathbb{R}^5$.

С помощью оператора $\mathfrak{L}_3$ систему (11) дополняем до интегрально равносильной системы

$$\mathfrak{L}_1(x)y = 0,\ \ \mathfrak{L}_2(x)y = 0,\ \ \mathfrak{L}_3(x)y = 0. \tag{12}$$

Поскольку на $\mathbb{R}^5$

$$\bigl[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2\bigr] = \mathfrak{L}_3,\ \ \bigl[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_3\bigr] = \mathfrak{L}_3,\ \ \bigl[\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3\bigr] = \mathfrak{O},$$

то система (12) полная.

Стало быть, в пространстве $\mathbb{R}^5$ неполная система (11) имеет дефект $r = 1$.

Из второго уравнения системы (12) в силу третьего уравнения этой же системы получаем

$$x_1\partial_1 y + x_2\partial_2 y + x_3\partial_3 y = 0. \tag{13}$$

Тогда из первого уравнения системы (11) имеем, что

$$x_4\partial_4 y + x_5\partial_5 y = 0.$$

А из этого уравнения и третьего уравнения системы (12) устанавливаем равенства

$$\partial_4 y = 0,\ \ \partial_5 y = 0.$$

Разрешая уравнение (13) относительно $\partial_1 y$, систему (12) приводим к нормальной системе

$$\partial_1 y = -\,\frac{x_2}{x_1}\,\partial_2 y - \frac{x_3}{x_1}\,\partial_3 y,\ \ \partial_4 y = 0,\ \ \partial_5 y = 0,$$

интегрально равносильной системам (11) и (12) на области нормализации, которой является любая область пространства $\mathbb{R}^5$ с ненулевой первой координатой.

Легко указать ещё два нормальных вида систем (11) и (12), которые получаем, разрешая уравнение (13) относительно $\partial_2 y$ и $\partial_3 y$.

5. Размерность базиса первых интегралов

Система уравнений в полных дифференциалах, ассоциированная к нормальной линейной однородной системе уравнений в частных производных. Равносильность нормальной системы и ассоциированной системы уравнений в полных дифференциалах. Критерий полноты (якобиевости) нормальной системы уравнений в частных производных. Размерность локального базиса первых интегралов полной нормальной системы. Размерность локального базиса первых интегралов полной системы. Размерность локального базиса первых интегралов неполной системы. Критерий полноты системы на основе размерности базиса её первых интегралов. Отсутствие первых интегралов у неполной системы с количеством уравнений на единицу меньше количества независимых переменных. Общий базис первых интегралов у неполной системы (∂) *и соответствующей ей полной системы* ($\overset{*}{\partial}$).

Система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_s = -\sum_{j=1}^{m} u_{js}(x)dx_j, \ s = \overline{m+1, n}, \tag{1}$$

является ассоциированой к нормальной линейной однородной системе уравнений в частных производных (N∂). Для системы (1), как системы вида (CD), линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{X}_j, \ j = \overline{1, m}$, имеют вид:

$$\mathfrak{X}_j(x) = \mathfrak{L}_j(x) = \partial_j - \mathfrak{M}_j(x), \ j = \overline{1, m}, \tag{2}$$

где операторы $\mathfrak{M}_j$ задаются формулой (3.2).

Из (2) следует идентичность тождеств (2.1.1) и (2.1) для функции $F\colon \mathcal{X}' \to \mathbb{R}$.

Тем самым устанавливаем интегральную равносильность нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных и системы уравнений в полных дифференциалах.

Предложение 1. *Функция* $F\colon \mathcal{X}' \to \mathbb{R}$ *является первым интегралом на области* $\mathcal{X}'$ *нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных* $(\mathrm{N}\partial)$, *если и только если она является первым интегралом на этой области системы уравнений в полных дифференциалах* (1).

Используя понятия полноты и якобиевости для линейной однородной системы уравнений в частных производных (∂), а также понятие полной разрешимости для системы уравнений в полных дифференциалах (CD), приходим к заключению, по которому устанавливаем связь между этими понятиями.

Предложение 2. *Нормальная линейная однородная система уравнений в частных производных* $(\mathrm{N}\partial)$ *является полной* (*якобиевой*) *тогда и только тогда, когда система уравнений в полных дифференциалах* (1) *является вполне разрешимой.*

По теореме 1.3.1 и предложению 1 находим размерность базиса первых интегралов полной нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Предложение 3. *Полная* (*якобиева*) *система* $(\mathrm{N}\partial)$ *в окрестности каждой точки из области* $\mathcal{X}$ *имеет базис первых интегралов размерности* $n-m$.

В соответствии с определением 1.4 на основании теоремы 3.4 и предложения 3 находим размерность базиса первых интегралов полной линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Свойство 1. *Полная линейная однородная система уравнений в частных производных* (∂) *в окрестности каждой точки из её области нормализации имеет базис первых интегралов размерности* $n-m$.

Непосредственно по предложению 1.3 (с учётом определения 1.3) и свойству 1 устанавливаем размерность базиса первых интегралов неполной линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Свойство 2. *Неполная линейная однородная система уравнений в частных производных* (∂) *с дефектом* r *в окрестности каждой точки из её области нормализации имеет базис первых интегралов размерности* $n-m-r$.

Из свойства 2 получаем

Следствие 1. *Неполная система* (∂), *состоящая из* $n-1$ *уравнений с* n *неизвестными, не имеет первых интегралов, отличных от произвольной постоянной.*

На основании свойств 1 и 2 находим размерность базиса первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Теорема 1. *Линейная однородная система уравнений в частных производных* (∂) *с дефектом* $r,\ 0 \leqslant r \leqslant n-m$, *в окрестности каждой точки из её области нормализации имеет базис первых интегралов размерности* $n-m-r$.

Из теоремы 1 получаем следующий *критерий полноты линейной однородной системы уравнений в частных производных.*

Предложение 4. *Линейная однородная система уравнений в частных производных* (∂) *является полной тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки из её области нормализации она имеет базис первых интегралов размерности* $n-m$.

Для последующих рассуждений удобно принять

Соглашение 1. *Через* $\overset{*}{\mathfrak{L}}_{\nu}(x),\ \forall x \in \mathfrak{X},\ \nu = \overline{1,r}$, *обозначим линейные дифференциальные операторы, которые построены на основании операторов* (1.1) *по закону* (4.3) *и посредством которых система* (∂) *доопределяется до полной.*

При этом наряду с системой (∂) будем рассматривать полную линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_j(x)y = 0,\ j = \overline{1,m}\,,\ \ \overset{*}{\mathfrak{L}}_{\nu}(x)y = 0,\ \nu = \overline{1,r}\,, \qquad (\overset{*}{\partial})$$

где r — дефект системы (∂), $0 \leqslant r \leqslant n-m$.

Причём операторы

$$\mathfrak{L}_j,\ j = \overline{1,m}\,, \quad \text{и} \quad \overset{*}{\mathfrak{L}}_{\nu},\ \nu = \overline{1,r}\,,$$

не являются линейно связанными на области $\mathfrak{X}$.

Если $r=0$, то система $(\overset{*}{\partial})$ будет иметь вид (∂).

Из теоремы 1 и предложения 1.3 получаем

Предложение 5. *Функции* $F_{\varepsilon}\colon \mathfrak{X}' \to \mathbb{R},\ \varepsilon = \overline{1, n-m-r}\,$, *образуют базис первых интегралов на области* $\mathfrak{X}'$ *системы* (∂) *с дефектом* $r,\ 0 \leqslant r \leqslant n-m$, *тогда и только тогда,* *когда они являются базисом первых интегралов на этой области системы* ($\overset{*}{\partial}$).

Пример 1. Функции

$$F_1\colon x \to \frac{x_2}{x_1}\,,\ \forall x \in \widetilde{\mathcal{X}}, \quad \text{и} \quad F_2\colon x \to \frac{x_3}{x_1},\ \forall x \in \widetilde{\mathcal{X}},$$

на любой области $\widetilde{\mathcal{X}}$ из множества $\mathbb{R}^5 \backslash \{x\colon x_1 = 0\}$ образуют базис первых интегралов как полной системы (12.4) (по свойству 1, так как $n - m = 5 - 3 = 2$), так и интегрально равносильной ей неполной системы (11.4) с дефектом $r = 1$ (по предложению 5).

§3. Размерность базиса первых интегралов не вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах

Нормальная линейная однородная система уравнений в частных производных, ассоциированная к системе уравнений в полных дифференциалах. Равносильность системы уравнений в полных дифференциалах и ассоциированной нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных. Размерность локального базиса первых интегралов не вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах. Размерность базиса первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах (общий случай). Дефект и область разрешимости системы уравнений в полных дифференциалах. Построение вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах интегрально равносильной не вполне разрешимой.

Ассоциированная к системе уравнений в полных дифференциалах (CD) линейная однородная система уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial_j y = -\sum_{\tau=m+1}^{m+n} X_{\tau-m,j}(z)\partial_\tau y,\ j=\overline{1,m}\,, \tag{1}$$

где $z=(z_1,\ldots,z_{m+n})$, является нормальной на области $\mathcal{G}$ из пространства $\mathbb{R}^{m+n}$.

Вполне очевидно (по определениям 1.1.1 и 1.1.2), что системы (CD) и (1) интегрально равносильны на области $\mathcal{G}$ в том смысле, что у них одни и те же первые интегралы на этой области.

В соответствии с предложением 2.5.2 система (CD) вполне разрешима тогда и только тогда, когда система (1) полная. В этом случае известно, что у них базис первых интегралов имеет размерность n (см. теорему 1.3.1 и свойство 1.5.2).

В случае, когда система (CD) является не вполне разрешимой, дополним систему (1) до полной. Тем самым установим её дефект r при $0<r\leqslant n$. У полученной полной системы найдём область нормализации. Тогда по свойству 2.5.2 имеет место

Предложение 1. *Не вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах* (CD) *в окрестности любой* *точки из области нормализации ассоциированной к ней линейной однородной (неполной) системы уравнений в частных производных* (1) *имеет базис первых интегралов размерности* $n-r$, *где* r *— дефект системы* (1).

Если учесть соглашение (см. п. 3, § 2) о том, что у полной системы (1) дефект $r = 0$, то приходим к обобщающему утверждению (по отношению к теореме 1.3.1 и предложению 1) о базисе первых интегралов системы (CD), когда она является или нет вполне разрешимой.

Предложение 2. *Система уравнений в полных дифференциалах* (CD) *в окрестности любой точки из области нормализации ассоциированной к ней линейной однородной системы уравнений в частных производных* (1) *имеет базис первых интегралов размерности* $n-r$, *где* r *— дефект системы* (1), $0 \leqslant r \leqslant n$.

Это позволяет ввести понятие дефекта и понятие области разрешимости для не вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (CD), а также предложение 2 (и предложение 1 как частный случай) сформулировать с использованием введённых понятий.

Определение 1. *Система уравнений в полных дифференциалах* (CD) *имеет* ***дефект*** r, $0 \leqslant r \leqslant n$, *если* r *является дефектом ассоциированной линейной однородной системы уравнений в частных производных* (1). *При этом область нормализации системы* (1) *назовём* ***областью разрешимости*** *системы* (CD).

Теорема 1. *Система уравнений в полных дифференциалах* (CD) *с дефектом* r, $0 \leqslant r \leqslant n$, *в окрестности любой точки из области разрешимости имеет базис первых интегралов размерности* $n-r$.

Пусть система (CD) имеет дефект r, $0 \leqslant r < n$. Линейную однородную систему уравнений в частных производных (1), ассоциированную к системе (CD), доопределим до полной

$$\begin{aligned} &\partial_{t_j} y + \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(t,x)\partial_{x_i} y = 0,\ j=\overline{1,m}\,, \\ &\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{X}_{i\nu}(t,x)\partial_{x_i} y = 0,\ \nu=\overline{1,r}\,, \end{aligned} \qquad (\overset{*}{1})$$

где функции $\overset{*}{X}_{i\nu},\ i=\overline{1,n}\,,\ \nu=\overline{1,r},$ получены на основании функций $X_{ij},\ i=\overline{1,n}\,,\ j=\overline{1,m}\,,$ в соответствии с законом (4.3.2).

Систему ($\overset{*}{1}$) приведём к нормальному виду и построим ассоциированную к ней систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_{k_\delta}=\sum_{j=1}^{m}G_{k_\delta j}(t,x)\,dt_j+\sum_{\mu=n-r+1}^{n}G_{k_\delta k_\mu}(t,x)\,dx_{k_\mu}\,,\ \delta=\overline{1,n-r}\,,$$
$$k_\nu,k_\mu\in\{1,\ldots,n\},\ k_i\ne k_\xi,\ i=\overline{1,n}\,,\ \xi=\overline{1,n}\,,\ i\ne\xi. \qquad (2)$$

Система (2) является вполне разрешимой на области нормализации системы ($\overset{*}{1}$) из пространства $\mathbb{R}^{m+n}$.

Система (2) по отношению к системе (CD) предполагает расширение координатного пространства Ot на r координат за счёт r координат пространства Ox.

Такое перераспределение зависимых переменных и независимых переменных позволяет в исходной системе (CD) перенумеровать лишь зависимые переменные так, что система (2) будет иметь вид

$$dx_i=\sum_{j=1}^{m+r}H_{ij}(t_1,\ldots,t_{m+r},x_1,\ldots,x_{n-r})dt_j,\ i=\overline{1,n-r}, \qquad (3)$$

где $t_{m+\nu}=x_{n-r+\nu},\ \nu=\overline{1,r}\,.$

Эта система является вполне разрешимой на области $\overset{*}{\mathcal{G}}$ из пространства $\mathbb{R}^{m+n}$, причём $\overset{*}{\mathcal{G}}$ есть область разрешимости системы (CD) и есть область нормализации систем (1) и ($\overset{*}{1}$).

Переход от системы (CD) к системе (3) связан со следующей закономерностью, основанной на том, что системы (CD) и (3) имеют одинаковый базис первых интегралов на области разрешимости, то есть, являются интегрально равносильными.

Предложение 3. *Система* (CD) *с координатными пространствами* Ot *и* Ox *и дефектом* $r, 0\leqslant r<n,$ *на некоторой области* (*область разрешимости*) *интегрально равносильна вполне разрешимой системе с координатны-*

ми пространствами $Ot_1 \ldots t_{m+r}$ *и* $Ox_1 \ldots x_{n-r}$*, где* $t_{m+\nu} = x_{n-r+\nu}$, $\nu = \overline{1, r}$ (с точностью до нумерации зависимых переменных $x_1, \ldots, x_n$).

Система (3.1.1), не будучи вполне разрешимой, может иметь не более одного первого интеграла (с точностью до функциональной независимости). Стало быть, система (3.1.1) имеет базис первых интегралов, состоящий из одного первого интеграла (4.1.1).

Пример 1. Система в полных дифференциалах

$$dx_1 = x_1\, dt_1 + x_2\, dt_2, \ \ dx_2 = 2x_2\, dt_1 + x_1\, dt_2 \tag{4}$$

не является вполне разрешимой, ибо скобки Пуассона

$$\big[\mathfrak{X}_1(t,x), \mathfrak{X}_2(t,x)\big] = \big[\partial_{t_1} + x_1\partial_{x_1} + 2x_2\partial_{x_2},\, \partial_{t_2} + x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}\big] =$$

$$= x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2} \equiv \mathfrak{X}_3(t,x), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

не обращается в тождественный нуль ни на какой четырёхмерной области пространства $\mathbb{R}^4$.

Система в частных производных

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_1(z)y &\equiv \partial_1 y + z_3\partial_3 y + 2z_4\partial_4 y = 0, \\ \mathfrak{Z}_2(z)y &\equiv \partial_2 y + z_4\partial_3 y + z_3\partial_4 y = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

ассоциированная к системе (4), является неполной.

Доопределим систему (5) путём присоединения к ней уравнения

$$\mathfrak{Z}_3(z)y \equiv z_4\partial_3 y - z_3\partial_4 y = 0. \tag{6}$$

Поскольку скобки Пуассона

$$\big[\mathfrak{Z}_1(z), \mathfrak{Z}_3(z)\big] = z_4\partial_3 + z_3\partial_4, \ \forall z \in \mathbb{R}^4,$$

не является линейной комбинацией операторов $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ и $\mathfrak{Z}_3$, то линейная однородная система уравнений в частных производных, состоящая из уравнений (5) и (6), — неполная.

В соответствии со следствием 1.5.2 она не имеет первых интегралов. Значит, система (5) тоже не имеет первых интегралов (у неполной системы (5) дефект $r = 2$). Поэтому нет первых интегралов и у системы (4) ($n - r = 2 - 2 = 0$).

Пример 2. Система в полных дифференциалах

$$dx_1 = x_1\, dt_1 + x_1^2\, dt_2, \ \ dx_2 = x_2^2\, dt_1 + x_2^3\, dt_2 \tag{7}$$

такова, что скобки Пуассона

$$\big[\mathfrak{X}_1(t,x),\mathfrak{X}_2(t,x)\big]=\big[\partial_{t_1}+x_1\partial_{x_1}+x_2^2\partial_{x_2}\,,\ \partial_{t_2}+x_1^2\partial_{x_1}+x_2^3\partial_{x_2}\big]=$$
$$=x_1^2\partial_{x_1}+x_2^4\partial_{x_2}\equiv\mathfrak{X}_3(t,x),\ \forall(t,x)\in\mathbb{R}^4,$$

не обращаются в тождественный нуль ни на какой четырёхмерной области пространства $\mathbb{R}^4$.

Поэтому система (7) не вполне разрешимая.

Операторы $\mathfrak{X}_j,\ j=\overline{1,4}$, где

$$\mathfrak{X}_4(t,x)=\big[\mathfrak{X}_2(t,x),\mathfrak{X}_3(t,x)\big]=x_2^6\partial_{x_2}\,,\ \forall(t,x)\in\mathbb{R}^4,$$

не являются линейно связанными на $\mathbb{R}^4$.

Следовательно, ассоциированная к системе (7) линейная однородная (неполная) система уравнений в частных производных

$$\partial_1 y+z_3\partial_3 y+z_4^2\partial_4 y=0,\ \ \partial_2 y+z_3^2\partial_3 y+z_4^3\partial_4 y=0 \tag{8}$$

имеет дефект $r=2$.

Отсюда заключаем:

1) система (8) не имеет первых интегралов, отличных от тождественной постоянной (в соответствии со свойством 2.5.2 при $n-m-r=$ $=4-2-2=0$);

2) для системы (7) $n-r=2-2=0$, и у неё нет первых интегралов (по теореме 1).

Замечание 1. Система (7) может служить примером ситуации, когда система (CD) при отсутствии первых интегралов имеет частные интегралы.

Частными интегралами системы (7) являются функции

$$w_1\colon(t,x)\to x_1,\ \forall(t,x)\in\mathbb{R}^4,\quad \text{и}\quad w_2\colon(t,x)\to x_2,\ \forall(t,x)\in\mathbb{R}^4.$$

Пример 3. Система в частных производных

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_1(z)y&\equiv\partial_1 y+z_3\partial_3 y+(1+z_3+2z_4)\partial_4 y=0,\\ \mathfrak{L}_2(z)y&\equiv\partial_2 y+3z_3\partial_3 y+(z_3+3z_4)\partial_4 y=0\end{aligned} \tag{9}$$

является ассоциированной к не вполне разрешимой системе (3.1.1), и поэтому система (9) является неполной.

Поскольку скобки Пуассона

$$\big[\mathfrak{L}_1(z),\mathfrak{L}_2(z)\big]=(3-z_3)\partial_4\equiv\mathfrak{L}_3(z),\ \forall z\in\mathbb{R}^4,$$

$$\bigl[\mathfrak{L}_1(z), \mathfrak{L}_3(z)\bigr] = \frac{z_3 - 6}{3 - z_3}\, \mathfrak{L}_3(z),\ \forall z \in \{z\colon z_3 \neq 3\},$$

$$\bigl[\mathfrak{L}_2(z), \mathfrak{L}_3(z)\bigr] = \frac{2z_3 - 9}{3 - z_3}\, \mathfrak{L}_3(z),\ \forall z \in \{z\colon z_3 \neq 3\},$$

то у системы (9) дефект $r = 1$.

По теореме 1, система (3.1.1) обладает базисом первых интегралов размерности $n - r = 2 - 1 = 1$, состоящим из первого интеграла (4.1.1).

Интегральная равносильность систем (9) и (3.1.1) на пространстве $\mathbb{R}^4$ позволяет на основе базиса первых интегралов (4.1.1) системы (3.1.1) построить базис первых интегралов

$$Z\colon z \to z_3 \exp\bigl(-z_1 - 3z_2\bigr),\ \forall z \in \mathbb{R}^4,$$

линейной однородной дифференциальной системы (9).

Пример 4. Система в полных дифференциалах

$$dx_i = \frac{t_2 - 1}{t_1(t_2 - t_1)}\, x_i\, dt_1 - \frac{t_1 - 1}{t_2(t_2 - t_1)}\, x_i\, dt_2,\ i = \overline{1,3}\,, \tag{10}$$

имеет два функционально независимых первых интеграла

$$F_1\colon (t,x) \to \frac{x_2}{x_1}\,,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',\ \text{ и }\ F_2\colon (t,x) \to \frac{x_3}{x_1}\,,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}', \tag{11}$$

на любой области $\mathcal{D}'$ из множества $\mathcal{W} = \{(t,x)\colon t_1t_2(t_2 - t_1)x_1 \neq 0\}$. Система (10) не вполне разрешимая, так как в выражениях

$$d\ln x_i = \frac{t_2 - 1}{t_1(t_2 - t_1)}\, dt_1 - \frac{t_1 - 1}{t_2(t_2 - t_1)}\, dt_2$$

правая часть не является полным дифференциалом. А значит, у неё нет решений.

Ассоциированная к системе (10) нормальная линейная однородная система уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} &\partial_1 u + \frac{y_3(y_2 - 1)}{y_1(y_2 - y_1)}\, \partial_3 u + \frac{y_4(y_2 - 1)}{y_1(y_2 - y_1)}\, \partial_4 u + \frac{y_5(y_2 - 1)}{y_1(y_2 - y_1)}\, \partial_5 u = 0, \\ &\partial_2 u + \frac{y_3(y_1 - 1)}{y_2(y_1 - y_2)}\, \partial_3 u + \frac{y_4(y_1 - 1)}{y_2(y_1 - y_2)}\, \partial_4 u + \frac{y_5(y_1 - 1)}{y_2(y_1 - y_2)}\, \partial_5 u = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

является неполной.

При соответствующем выборе переменных система (11.4.2) приводится к нормальному виду (12) (у системы (11.4.2) выражаются $\partial_4 y$ и $\partial_5 y$). Используя результат примера 1.4.2, устанавливаем, что система (12) имеет дефект $r = 1$.

Поэтому для системы (10) разность $n-r = 3-1 = 2$, и, стало быть, функции (11) образуют базис первых интегралов на всякой области $\mathcal{D}'$ из множества $\mathcal{W}$ этой не вполне разрешимой системы.

Неполная нормальная система (12), соответственно, имеет базис первых интегралов

$$\Phi_1 \colon y \to \frac{y_4}{y_3}\,,\ \forall y \in \mathcal{Y}, \quad \text{и} \quad \Phi_2 \colon y \to \frac{y_5}{y_3}\,,\ \forall y \in \mathcal{Y},$$

на всякой области $\mathcal{Y} \subset \{y \colon y_1 y_2 y_3 (y_2 - y_1) \neq 0\}$ из пространства $\mathbb{R}^5$, такой же размерности $n - m - r = 5 - 2 - 1 = 2$ (см. пример 1.5.2).

§4. Метод Якоби построения базиса первых интегралов

Метод Якоби построения базиса первых интегралов якобиевой линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных (∂). *Распространение метода Якоби построения базиса первых интегралов на полные системы* (∂). *Метод Якоби построения базиса первых интегралов вполне разрешимых систем уравнений в полных дифференциалах.*

1. Интегрирование якобиевой линейной однородной системы уравнений в частных производных

Рассматриваемый метод построения базиса первых интегралов линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных пригоден лишь для якобиевых систем, то есть, для таких систем (∂), у которых линейные дифференциальные операторы (1.1.2) попарно связаны коммутаторными тождествами (2.2.2).

Этот метод интегрирования будем называть *методом Якоби.* Он состоит в последовательном интегрировании линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных, входящих в задание якобиевой системы (∂).

Возьмём, например, первое уравнение якобиевой линейной однородной системы уравнений в частных производных (∂)

$$\mathfrak{L}_1(x)y = 0 \tag{1}$$

и построим его базис первых интегралов

$$H_\xi^1\colon x \to H_\xi^1(x),\ \forall x \in \mathcal{X}',\ \xi = \overline{2,n}\,, \tag{2}$$

на подобласти $\mathcal{X}'$ области $\mathcal{X}$ из пространства $\mathbb{R}^n$.

Не умаляя общности, будем считать, что у дифференциального оператора $\mathfrak{L}_1$ первая координата u_{11} не является тождественным нулём на области $\mathcal{X}$ (в противном случае этого всегда можно добиться перенумерованием переменных $x_i,\ i = \overline{1,n}$).

Выполним в якобиевой системе (∂) замену

$$x_1^1 = x_1,\ x_\xi^1 = H_\xi^1(x),\ \xi = \overline{2,n}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}'. \tag{3}$$

Так как на области $\mathcal{X}'$

$$\partial_{x_i} y\big|_{(3)} = \partial_{x_1^1} y\, \partial_{x_i} x_1 + \sum_{\xi=2}^{n} \partial_{x_\xi^1} y\, \partial_{x_i} H_\xi^1(x),\ i = \overline{1,n}\,,$$

то

$$\mathfrak{L}_j(x) y\big|_{(3)} = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{ji}(x) \partial_{x_i} y\Big)\Big|_{(3)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{ji}(x)\Big(\partial_{x_i} x_1 \partial_{x_1^1} y + \sum_{\xi=2}^{n} \partial_{x_i} H_\xi^1(x)\, \partial_{x_\xi^1} y\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{ji}(x) \partial_{x_i} x_1 \partial_{x_1^1} y + \sum_{\xi=2}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{ji}(x) \partial_{x_i} H_\xi^1(x)\, \partial_{x_\xi^1} y =$$

$$= \big(\mathfrak{L}_j x_1\big) \partial_{x_1^1} y + \sum_{\xi=2}^{n} \mathfrak{L}_j H_\xi^1(x)\, \partial_{x_\xi^1} y,\ \forall x \in \mathcal{X}',\ j = \overline{1,m}\,.$$

Поскольку функции (2) являются первыми интегралами на области $\mathcal{X}'$ дифференциального уравнения (1), то

$$\mathfrak{L}_1 H_\xi^1(x) = 0,\ \forall x \in \mathcal{X}',\ \xi = \overline{2,n}\,.$$

Первое уравнение (1) якобиевой системы (∂) при замене (3) примет вид

$$\mathfrak{L}_1^1(x^1) y^1 = 0,$$

где оператор

$$\mathfrak{L}_1^1(x^1) = u_{11}^1(x^1) \partial_{x_1^1},\ \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \tag{4}$$

$x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, область $\mathcal{X}^1$ есть образ области $\mathcal{X}'$ при преобразованиях (3), а координата u_{11}^1 такова, что

$$u_{11}^1(x^1)\big|_{(3)} = u_{11}(x),\ \forall x^1 \in \mathcal{X}^1,\ \forall x \in \mathcal{X}',$$

причём u_{11}^1 не обращается в тождественный нуль на области $\mathcal{X}^1$.

Остальные уравнения

$$\mathfrak{L}_\zeta(x)y = 0,\ \zeta = \overline{2,m}\,,$$

якобиевой системы (∂) при замене (3) будут иметь виды

$$\mathfrak{L}_\zeta^1(x^1)y^1 = 0,\ \zeta = \overline{2,m}\,,$$

где линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{L}_\zeta^1(x^1) = \sum_{i=1}^n u_{\zeta i}^1(x^1)\partial_{x_i^1}\,,\ \forall x^1 \in \mathcal{X}^1,\ \zeta = \overline{2,m}\,, \tag{5}$$

имеют такие координаты $u_{\zeta i}^1$, что

$$u_{\zeta 1}^1(x^1)\big|_{(3)} = \mathfrak{L}_\zeta x_1 = u_{\zeta 1}(x),\quad u_{\zeta\xi}^1(x^1)\big|_{(3)} = \mathfrak{L}_\xi H_\xi^1(x),$$

$$\forall x^1 \in \mathcal{X}^1,\ \forall x \in \mathcal{X}',\ \zeta = \overline{2,m}\,,\ \xi = \overline{2,n}\,.$$

Итак, с помощью замены (3) якобиеву систему (∂) приводим к линейной однородной дифференциальной системе уравнений в частных призводных

$$\mathfrak{L}_j^1(x^1)y^1 = 0,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{6}$$

построенной на основании операторов (4) и (5).

Относительно дифференциальной системы (6) оговорим следующие обстоятельства.

Функции (2) образуют базис первых интегралов на области $\mathcal{X}'$ линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (1). Поэтому преобразование (3) является голоморфизмом на области $\mathcal{X}'$.

Система (∂) — якобиева, а якобиева система инвариантна при голоморфизме (свойство 2.4.2).

Стало быть, и система (6) является якобиевой на области $\mathcal{X}^1$.

Кроме этого, голоморфизм (3) устанавливает ещё одно свойство линейных дифференциальных операторов (4) и (5), состоящее в том, что они не являются голоморфно линейно связанными на области $\mathcal{X}^1$.

Это обосновано тем, что априори для линейных дифференциальных операторов (1.1.2) принято свойство, по которому они не являются голоморфно линейно связанными на области $\mathcal{X}'$ — прообразе области $\mathcal{X}^1$ при голоморфизме (3).

В силу якобиевости системы (6) для операторов (4) и (5) выполняются тождества

$$\Big[\mathfrak{L}_1^1(x^1), \mathfrak{L}_\zeta^1(x^1)\Big] = \mathfrak{O}, \ \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \ \zeta = \overline{2, m}\,,$$

или в координатах

$$\Big[\mathfrak{L}_1^1(x^1), \mathfrak{L}_\zeta^1(x^1)\Big] =$$

$$= \Big(u_{11}^1(x^1)\,\partial_{x_1^1} u_{\zeta 1}^1(x^1) - \sum_{i=1}^{n} u_{\zeta i}^1(x^1)\,\partial_{x_i^1} u_{11}^1(x^1)\Big)\partial_{x_1^1} +$$

$$+\, u_{11}^1(x^1) \sum_{\xi=2}^{n} \partial_{x_1^1} u_{\zeta\xi}^1(x^1)\,\partial_{x_\xi^1} = \mathfrak{O}, \ \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \ \zeta = \overline{2, m}\,.$$

Учитывая, что $u_{11}^1(x^1) \not\equiv 0$ на области $\mathcal{X}^1$, и приравнивая тождественно нулю функции-координаты при $\partial_{x_\xi^1}$, $\xi = \overline{2, n}$, получаем, что

$$\partial_{x_1^1} u_{\zeta\xi}^1(x^1) = 0, \ \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \ \zeta = \overline{2, m}\,, \ \xi = \overline{2, n}\,.$$

Следовательно, у линейных дифференциальных операторов (5) координаты $u_{\zeta\xi}^1$, $\zeta = \overline{2, m}\,$, $\xi = \overline{2, n}\,$, не зависят от x_1^1.

Поскольку функция u_{11}^1 тождественно не равна нулю на области $\mathcal{X}^1$, то уравнение (4) приводим к виду

$$\partial_{x_1^1} y^1 = 0.$$

Учитывая эти обстоятельства и переобозначив переменные

$$x_\xi^1 = \overset{*}{x}{}_{\xi-1}^1\,,\ \xi = \overline{2, n}\,, \tag{7}$$

на основании системы (6) составим новую линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$\overset{*}{\mathfrak{L}}{}_\zeta^1\bigl(\overset{*}{x}{}^1\bigr) y^1 = 0,\ \zeta = \overline{2, m}\,, \tag{8}$$

у которой линейные дифференциальные операторы

$$\overset{*}{\mathfrak{L}}{}_\zeta^1\bigl(\overset{*}{x}{}^1\bigr) = \sum_{\tau=1}^{n-1} \overset{*}{u}{}_{\zeta\tau}^1\bigl(\overset{*}{x}{}^1\bigr)\partial_{\overset{*}{x}{}_\tau^1},\ \ \forall\, \overset{*}{x}{}^1 \in \overset{*}{\mathfrak{X}}{}^1,\ \zeta = \overline{2, m}\,. \tag{9}$$

Область $\overset{*}{\mathfrak{X}}{}^1$ является естественной проекцией области $\mathfrak{X}^1$ на координатное пространство $Ox_2^1 \ldots x_n^1$ и рассматривается в координатном пространстве $O\overset{*}{x}{}_1^1 \ldots \overset{*}{x}{}_{n-1}^1,\ \overset{*}{x}{}^1 = \bigl(\overset{*}{x}{}_1^1, \ldots, \overset{*}{x}{}_{n-1}^1\bigr)$.

Новые координаты $\overset{*}{u}{}_{\zeta\tau}^1$ будут такими, что

$$\overset{*}{u}{}_{\zeta\tau}^1\bigl(\overset{*}{x}{}^1\bigr)\big|_{(7)} = u_{\zeta,\tau+1}^1(x^1),\ \forall\, \overset{*}{x}{}^1 \in \overset{*}{\mathfrak{X}}{}^1,\ \forall x^1 \in \mathfrak{X}^1,$$

$$\overset{*}{\mathfrak{X}}{}^1 \subset \mathbb{R}^{n-1},\ \mathfrak{X}^1 \subset \mathbb{R}^n,\ \zeta = \overline{2, m}\,,\ \tau = \overline{1, n-1}\,.$$

Дифференциальная система (6) является якобиевой, у операторов (5) координаты $u_{\zeta\xi}^1,\ \zeta = \overline{2, m}\,,\ \xi = \overline{2, n}\,,$ не зависят от x_1^1, поэтому скобки Пуассона

$$\Bigl[\mathfrak{L}_\zeta^1(x^1),\ \mathfrak{L}_\theta^1(x^1)\Bigr] = \mathfrak{O},\ \forall x^1 \in \mathfrak{X}^1,\ \zeta = \overline{2, m}\,,\ \theta = \overline{2, m}\,,$$

или в координатах

$$\Bigl[\mathfrak{L}_\zeta^1(x^1),\ \mathfrak{L}_\theta^1(x^1)\Bigr] =$$

$$= \Bigl[u_{\zeta 1}^1(x^1)\partial_{x_1^1} + \overset{*}{\mathfrak{L}}_\zeta\bigl(\overset{*}{x}{}^1\bigr),\ u_{\theta 1}^1(x^1)\partial_{x_1^1} + \overset{*}{\mathfrak{L}}_\theta\bigl(\overset{*}{x}{}^1\bigr)\Bigr] =$$

$$= \Big[u^1_{\zeta 1}(x^1)\partial_{x^1_1},\ u^1_{\theta 1}(x^1)\partial_{x^1_1}\Big] + \Big[u^1_{\zeta 1}(x^1)\partial_{x^1_1},\ \overset{*}{\mathfrak{L}}_\theta\big(\overset{*}{x}{}^1\big)\Big] +$$

$$+\ \Big[\overset{*}{\mathfrak{L}}_\zeta\big(\overset{*}{x}{}^1\big),\ u^1_{\theta 1}(x^1)\partial_{x^1_1}\Big] + \Big[\overset{*}{\mathfrak{L}}_\zeta\big(\overset{*}{x}{}^1\big),\ \overset{*}{\mathfrak{L}}_\theta\big(\overset{*}{x}{}^1\big)\Big] =$$

$$= \Big[\overset{*}{\mathfrak{L}}_\zeta\big(\overset{*}{x}{}^1\big),\ \overset{*}{\mathfrak{L}}_\theta\big(\overset{*}{x}{}^1\big)\Big] = \mathfrak{O},\ \forall x^1 \in \mathfrak{X}^1,\ \zeta = \overline{2,m}\,,\ \theta = \overline{2,m}\,,$$

то есть, операторы (9) таковы, что

$$\Big[\overset{*}{\mathfrak{L}}_\zeta\big(\overset{*}{x}{}^1\big),\ \overset{*}{\mathfrak{L}}_\theta\big(\overset{*}{x}{}^1\big)\Big] = \mathfrak{O},\ \forall\, \overset{*}{x}{}^1 \in \overset{*}{\mathfrak{X}}{}^1,\ \zeta = \overline{2,m}\,,\ \theta = \overline{2,m}\,.$$

Следовательно, дифференциальная система (8) будет якобиевой на области $\overset{*}{\mathfrak{X}}{}^1$.

Для якобиевости системы (8) осуществляем такую же процедуру, какую проделали относительно исходной системы (∂).

Продолжая этот процесс далее, получаем уравнение

$$\overset{*}{\mathfrak{L}}{}^{m-1}_m\big(\overset{*}{x}{}^{m-1}\big)y^{m-1} = 0,$$

где $\overset{*}{x}{}^{m-1} = \big(\overset{*}{x}{}^{m-1}_m, \ldots, \overset{*}{x}{}^{m-1}_n\big)$, $\overset{*}{x}{}^{m-1} \in \mathbb{R}^{n-m+1}$, с базисом первых интегралов

$$H^{m-1}_l\colon\ \overset{*}{x}{}^{m-1} \to H^{m-1}_l\big(\overset{*}{x}{}^{m-1}\big),\ l = \overline{m+1,n}\,, \tag{10}$$

на области $\overset{*}{\mathfrak{X}}{}^{m-1}$ из пространства $\mathbb{R}^{n-m+1}$.

Учитывая все выполненные замены переменных, на основании функций (10) строим базис первых интегралов исходной якобиевой системы (∂), который имеет размерность $n-m$.

Пример 1. *Построим базис первых интегралов линейной однородной системы уравнений* [48, с. 73 − 75]

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}_1(x)y \equiv x_1\partial_1 y - x_2\partial_2 y + x_3\partial_3 y - x_4\partial_4 y = 0,\\ &\mathfrak{L}_2(x)y \equiv x_3\partial_1 y + x_4\partial_2 y - x_1\partial_3 y - x_2\partial_4 y = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Скобки Пуассона

$$[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)] = (x_1\partial_1 x_3 - x_2\partial_2 x_3 + x_3\partial_3 x_3 - x_4\partial_4 x_3 - x_3\partial_1 x_1 - x_4\partial_2 x_1 +$$

$$+ x_1\partial_3 x_1 + x_2\partial_4 x_1)\partial_1 + \bigl(x_1\partial_1 x_4 - x_2\partial_2 x_4 + x_3\partial_3 x_4 - x_4\partial_4 x_4 -$$

$$- x_3\partial_1(-x_2) - x_4\partial_2(-x_2) + x_1\partial_3(-x_2) + x_2\partial_4(-x_2)\bigr)\partial_2 +$$

$$+ \bigl(x_1\partial_1(-x_1) - x_2\partial_2(-x_1) + x_3\partial_3(-x_1) - x_4\partial_4(-x_1) - x_3\partial_1 x_3 - x_4\partial_2 x_3 +$$

$$+ x_1\partial_3 x_3 + x_2\partial_4 x_3\bigr)\partial_3 + \bigl(x_1\partial_1(-x_2) - x_2\partial_2(-x_2) + x_3\partial_3(-x_2) -$$

$$- x_4\partial_4(-x_2) - x_3\partial_1(-x_4) - x_4\partial_2(-x_4) + x_1\partial_3(-x_4) + x_2\partial_4(-x_4)\bigr)\partial_4 =$$

$$= (x_3 - x_3)\partial_1 + (-x_4 + x_4)\partial_2 + (-x_1 + x_1)\partial_3 + (x_2 - x_2)\partial_4 = \mathfrak{O},\ \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

Следовательно, система (11) является якобиевой на пространстве $\mathbb{R}^4$, а её базис первых интегралов состоит из двух функционально независимых первых интегралов.

Рассмотрим первое уравнение якобиевой системы (11)

$$\mathfrak{L}_1(x)y \equiv x_1\partial_1 y - x_2\partial_2 y + x_3\partial_3 y - x_4\partial_4 y = 0. \tag{12}$$

Ему интегрально равносильна обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_4}{-x_4}\,.$$

Из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} = 0$$

находим первый интеграл

$$F_1^1 \colon x \to x_1 x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

уравнения (12).

Аналогично, из дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_4}{x_4} = 0$$

находим ещё два первых интеграла

$$F_2^1 \colon x \to x_2 x_3 \quad \text{и} \quad F_3^1 \colon x \to x_1 x_4$$

на пространстве $\mathbb{R}^4$ уравнения (12).

Эти три первых интеграла, будучи функционально независимыми на $\mathbb{R}^4$, образуют интегральный базис на пространстве $\mathbb{R}^4$ линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (12).

Введём новые переменные

$$x_1 = x_1,\ u_2 = x_1x_2,\ u_3 = x_2x_3,\ u_4 = x_1x_4 \tag{13}$$

и на пространстве $\mathbb{R}^4$ вычислим:

$$\mathfrak{L}_1 x_1 = x_1;\ \ \mathfrak{L}_1(x_1x_2) = \mathfrak{L}_1(x_2x_3) = \mathfrak{L}_1(x_1x_4) = 0;\ \ \mathfrak{L}_2 x_1 = x_3;$$

$$\mathfrak{L}_2(x_1x_2) = x_3\partial_1(x_1x_2) + x_4\partial_2(x_1x_2) - x_1\partial_3(x_1x_2) - x_2\partial_4(x_1x_2) = \\ = x_2x_3 + x_1x_4;$$

$$\mathfrak{L}_2(x_2x_3) = x_3\partial_1(x_2x_3) + x_4\partial_2(x_2x_3) - x_1\partial_3(x_2x_3) - x_2\partial_4(x_2x_3) = \\ = x_3x_4 - x_1x_2;$$

$$\mathfrak{L}_2(x_1x_4) = x_3\partial_1(x_1x_4) + x_4\partial_2(x_1x_4) - x_1\partial_3(x_1x_4) - x_2\partial_4(x_1x_4) = \\ = x_3x_4 - x_1x_2.$$

Учитывая, что

$$x_2x_3 + x_1x_4 = u_3 + u_4,\ \ x_3x_4 - x_1x_2 = \frac{u_3u_4}{u_2} - u_2,$$

составляем линейное однородное уравнение в частных производных

$$(u_3 + u_4)\partial_{u_2} z + \frac{u_3u_4 - u_2^2}{u_2}\,(\partial_{u_3} z + \partial_{u_4} z) = 0 \tag{14}$$

и ассоциированную к нему обыкновенную дифференциальную систему

$$\frac{du_2}{u_2(u_3 + u_4)} = \frac{du_3}{u_3u_4 - u_2^2} = \frac{du_4}{u_3u_4 - u_2^2}\,.$$

Из дифференциального уравнения $du_3 = du_4$ находим первый интеграл уравнения (14)

$$F_1^2\colon (u_2, u_3, u_4) \to u_3 - u_4,\ \forall (u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{U}, \tag{15}$$

на любой области $\mathcal{U}$ из множества $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3 \backslash \{(u_2, u_3, u_4)\colon u_2 = 0\}$.

По свойству пропорции, на основании обыкновенной дифференциальной системы составляем уравнение

$$\frac{du_2}{u_2(u_3 + u_4)} = \frac{u_2\,du_2 + u_4\,du_3 + u_3\,du_4}{u_3u_4(u_3 + u_4)}\,,$$

которое преобразовываем к виду

$$u_2(u_4\,du_3 + u_3\,du_4) - u_3u_4\,du_2 + u_2^2\,du_2 = 0,$$

а затем, — к виду

$$u_2\,d(u_3u_4) - u_3u_4\,du_2 + u_2^2\,du_2 = 0,$$

и получаем, что дифференциал

$$d\Big(\frac{u_3u_4}{u_2} + u_2\Big) = 0.$$

Стало быть, функция

$$F_2^2\colon (u_2, u_3, u_4) \to u_2 + \frac{u_3u_4}{u_2}\,,\ \forall (u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{U}, \tag{16}$$

является первым интегралом на всякой области $\mathcal{U}$, содержащейся в множестве $\mathcal{V}$ из пространства $\mathbb{R}^3$, дифференциального уравнения (14).

Первые интегралы (15) и (16), будучи функционально независимыми на области $\mathcal{U}$, составляют базис первых интегралов на этой области линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (14).

Учитывая замену переменных (13), на основании функций (15) и (16) получаем функции

$$F_1\colon x \to x_1x_4 - x_2x_3,\ \ F_2\colon x \to x_1x_2 + x_3x_4,\ \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

которые образуют базис первых интегралов на пространстве $\mathbb{R}^4$ якобиевой системы (11).

Пример 2. *Построим базис первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных*

$$\mathfrak{J}_1(x)y \equiv \big(x_1{-}x_1(x_1{+}1)\big)\partial_1 y{+}\big({-}x_2(x_1{+}1)\big)\partial_2 y{+}\big({-}x_3(x_1{+}1)\big)\partial_3 y = 0,$$

$$\mathfrak{J}_2(x)y \equiv \big(-x_1 - x_1(x_1-1)\big)\partial_1 y\ + \tag{17}$$

$$+\big(x_2 - x_2(x_1-1)\big)\partial_2 y + \big(x_2 - x_3(x_1-1)\big)\partial_3 y = 0.$$

Система (17) является якобиевой, так как

$$[\mathfrak{J}_1(x), \mathfrak{J}_2(x)] = \mathfrak{O},\ \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

а её базис первых интегралов состоит из одного первого интеграла.

У первого уравнения системы (17) находим базис первых интегралов на области $\mathcal{X}' \subset \{x\colon x_1x_3 \neq 0\}$ пространства $\mathbb{R}^3$:

$$F_1^1\colon x \to \frac{x_2}{x_1}\,\exp\frac{1}{x_1}\,,\ \ F_2^1\colon x \to \frac{x_2}{x_3}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}',$$

Введём новые переменные

$$x_1 = x_1,\ \ u_2 = \frac{x_2}{x_1}\,\exp\frac{1}{x_1}\,,\ \ u_3 = \frac{x_2}{x_3} \tag{18}$$

и на области $\mathcal{X}'$ вычислим:

$$\mathfrak{J}_1 x_1 = \,-\,x_1^2;\ \ \mathfrak{J}_1\Big(\frac{x_2}{x_1}\,\exp\frac{1}{x_1}\Big) = \mathfrak{J}_1\frac{x_2}{x_3} = 0;\ \ \mathfrak{J}_2 x_1 = \,-\,x_1^2;$$

$$\mathfrak{J}_2\Big(\frac{x_2}{x_1}\,\exp\frac{1}{x_1}\Big) = 3\cdot\frac{x_2}{x_1}\,\exp\frac{1}{x_1}\,;\ \ \mathfrak{J}_2\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_2}{x_3} - \Big(\frac{x_2}{x_3}\Big)^2.$$

Учитывая, что

$$3\cdot\frac{x_2}{x_1}\,\exp\frac{1}{x_1} = 3u_2,\ \ \frac{x_2}{x_3} - \Big(\frac{x_2}{x_3}\Big)^2 = u_3 - u_3^2,$$

составляем линейное однородное уравнение в частных производных

$$3u_2\partial_{u_2} z + (u_3 - u_3^2)\partial_{u_3} z = 0. \tag{19}$$

Функция

$$F_1^2\colon (u_2, u_3) \to \frac{u_2(u_3-1)^3}{u_3^3}\,,\ \forall (u_2,u_3)\in\mathcal{U}, \tag{20}$$

образует базис первых интегралов уравнения в частных производных (19) на любой области $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\backslash\{(u_2,u_3)\colon u_3\neq 0\}$.

Учитывая замену переменных (18), на основании функции (20) получаем функцию

$$F\colon x \to \frac{(x_2-x_3)^3}{x_1x_2^2}\,\exp\frac{1}{x_1}\,,\ \forall x\in\mathcal{X},$$

которая образует базис первых интегралов на любой области $\mathcal{X}$ из множества $\{x\colon x_1x_2\neq 0\}$ якобиевой системы (17).

2. Интегрирование полной линейной однородной системы уравнений в частных производных

Известно (теорема 2.4.2), что полная система (∂) линейной невырожденной на области $\mathcal{X}$ заменой операторов (1.1.2) приводится к якобиевой системе. Поэтому метод Якоби может быть распространён и на полные системы (∂).

Для этого систему (∂) надо привести к нормальному виду (N∂). Система (N∂) будет якобиевой (по теореме 1.4.2, ввиду полноты системы (∂)), и для неё применим метод Якоби.

Построенный методом Якоби базис первых интегралов на области $\mathcal{X}'$, $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, системы (N$\partial$) также будет базисом первых интегралов системы (∂) на подобласти $\mathcal{X}'$ области $\mathcal{X}$.

Пример 1. *Построим базис первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных* [48, с. 73 – 75]

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1(x)y &\equiv \partial_1 y + \partial_2 y + \partial_3 y = 0, \\ \mathfrak{L}_2(x)y &\equiv x_1\partial_1 y + x_2\partial_2 y + x_3\partial_3 y = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Скобки Пуассона

$$[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)] = (\partial_1 x_1 + \partial_2 x_1 + \partial_3 x_1 - x_1\partial_1 1 - x_2\partial_2 1 - x_3\partial_3 1)\partial_1 +$$

$$+ (\partial_1 x_2 + \partial_2 x_2 + \partial_3 x_2 - x_1\partial_1 1 - x_2\partial_2 1 - x_3\partial_3 1)\partial_2 + (\partial_1 x_3 + \partial_2 x_3 +$$

$$+ \partial_3 x_3 - x_1\partial_1 1 - x_2\partial_2 1 - x_3\partial_3 1)\partial_3 = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = \mathfrak{L}_1(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Следовательно, система (1) полная, но не якобиева на $\mathbb{R}^3$.

Разрешая систему равенств (1) относительно $\partial_1 y$ и $\partial_2 y$, систему (1) приводим к нормальному виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1(x)y &\equiv \partial_1 y - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\,\partial_3 y = 0, \\ \mathfrak{M}_2(x)y &\equiv \partial_2 y - \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_1}\,\partial_3 y = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом система (2) будет якобиевой на всякой области $\mathcal{X}'$ из множества $\{x\colon x_2 - x_1 \neq 0\}$ и интегрально равносильной системе (1) на соответствующей области.

Рассмотрим первое уравнение системы (2)

$$\mathfrak{M}_1(x)y \equiv \partial_1 y - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\,\partial_3 y = 0. \qquad (3)$$

Ассоциированная обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{x_2 - x_1} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{-\,(x_3 - x_2)}$$

имеет первый интеграл $F_1^1\colon x \to x_2$ на области $\mathcal{X}'$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx_1}{x_2 - x_1} = \frac{dx_3}{x_2 - x_3}\,,$$

в котором x_2 выступает в роли постоянной, будучи уравнением с разделёнными переменными, имеет первый интеграл

$$\Phi\colon (x_1, x_3) \to \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\,,\ \forall (x_1, x_3) \in \overset{*}{\mathcal{X}},$$

на всякой области $\overset{*}{\mathcal{X}}$ из множества $\{(x_1, x_3)\colon x_1 \neq x_2\}$.

Следовательно, функции

$$F_1^1\colon x \to x_2,\ \forall x \in \mathcal{X}', \quad \text{и} \quad F_2^1\colon x \to \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}',$$

образуют базис первых интегралов на области $\mathcal{X}'$ линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (3).

Поскольку на области $\mathcal{X}'$

$$\mathfrak{M}_2\,\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \partial_2\,\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} - \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_1}\,\partial_3\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)^2} = 0,$$

то функция F_2^1 является первым интегралом на области $\mathcal{X}'$ второго уравнения системы (2), а значит, и системы (2).

Эта функция составляет базис первых интегралов на области $\mathcal{X}'$ якобиевой системы (2) и, следовательно, интегрально равносильной ей полной системы (1).

3. Построение базиса первых интегралов вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах

На основании интегральной равносильности вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (CD) и ассоциированной якобиевой нормальной линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных (N∂) (предложения 1.5.2 и 2.5.2) метод Якоби, разработанный в пункте 1 для якобиевых систем (∂), может использоваться для построения базиса первых интегралов вполне разрешимой системы (CD).

С этой целью на основании системы (CD) строим ассоциированную нормальную линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{X}_j(t,x)y = 0,\ j = \overline{1,m}\,. \tag{1}$$

При этом система (1) будет якобиевой на области $\mathcal{D}$ ввиду того, что система (CD) на области $\mathcal{D}$ вполне разрешима (предложения 2.2.2 и 2.5.2).

Затем методом Якоби (пункт 1) строим базис первых интегралов на подобласти $\mathcal{D}'$ области $\mathcal{D}$ системы (1), который будет базисом первых интегралов (предложение 1.5.2) данной вполне разрешимой системы (CD).

Пример 1. *Построим базис первых интегралов уравнения в полных дифференциалах*

$$dx = t_1t_3\,dt_1 + t_2t_3\,dt_2 + 0{,}5(t_1^2 + t_2^2)\,dt_3. \tag{2}$$

Ассоциированной к уравнению в полных дифференциалах (2) является нормальная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных

$$\begin{gathered}\mathfrak{X}_1(t,x)y \equiv \partial_{t_1}y + t_1t_3\partial_x y = 0,\ \ \mathfrak{X}_2(t,x)y \equiv \partial_{t_2}y + t_2t_3\partial_x y = 0,\\ \mathfrak{X}_3(t,x)y \equiv \partial_{t_3}y + 0{,}5(t_1^2 + t_2^2)\partial_x y = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Скобки Пуассона на пространстве $\mathbb{R}^4$

$$[\mathfrak{X}_1(t,x), \mathfrak{X}_2(t,x)] = (\mathfrak{X}_1 0 - \mathfrak{X}_2 1)\partial_{t_1} + (\mathfrak{X}_1 1 - \mathfrak{X}_2 0)\partial_{t_2} + (\mathfrak{X}_1 0 - \mathfrak{X}_2 0)\partial_{t_3} +$$
$$+ \big(\partial_{t_1}(t_2t_3) + t_1t_3\partial_x(t_2t_3) - \partial_{t_2}(t_1t_3) - t_2t_3\partial_x(t_1t_3)\big)\partial_x = \mathfrak{O};$$

$$[\mathfrak{X}_1(t,x), \mathfrak{X}_3(t,x)] = (\mathfrak{X}_1 0 - \mathfrak{X}_3 1)\partial_{t_1} + (\mathfrak{X}_1 0 - \mathfrak{X}_3 0)\partial_{t_2} + (\mathfrak{X}_1 1 - \mathfrak{X}_3 0)\partial_{t_3} +$$

$$+\Big(\partial_{t_1} \frac{t_1^2+t_2^2}{2} + t_1 t_3\, \partial_x \frac{t_1^2+t_2^2}{2} - \partial_{t_3}(t_1 t_3) - \frac{t_1^2+t_2^2}{2}\, \partial_x(t_1 t_3)\Big)\partial_x =$$

$$= (t_1 - t_1)\partial_x = \mathfrak{O};$$

$$[\mathfrak{X}_2(t,x), \mathfrak{X}_3(t,x)] = (\mathfrak{X}_2 0 - \mathfrak{X}_3 0)\partial_{t_1} + (\mathfrak{X}_2 0 - \mathfrak{X}_3 1)\partial_{t_2} + (\mathfrak{X}_2 1 - \mathfrak{X}_3 0)\partial_{t_3} +$$

$$+\Big(\partial_{t_2} \frac{t_1^2+t_2^2}{2} + t_2 t_3\, \partial_x \frac{t_1^2+t_2^2}{2} - \partial_{t_3}(t_2 t_3) - \frac{t_1^2+t_2^2}{2}\, \partial_x(t_2 t_3)\Big)\partial_x =$$

$$= (t_2 - t_2)\partial_x = \mathfrak{O}.$$

Стало быть, система (3) является якобиевой на пространстве $\mathbb{R}^4$, а уравнение (2) является вполне разрешимым на этом пространстве.

Поэтому базис первых интегралов нормальной якобиевой системы (3) (общий интеграл вполне разрешимого уравнения (2)) состоит из одного первого интеграла.

Рассмотрим первое уравнение нормальной якобиевой системы (3)

$$\mathfrak{X}_1(t,x)y \equiv \partial_{t_1} y + t_1 t_3 \partial_x y = 0. \qquad (4)$$

Ему интегрально равносильна обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dt_1}{1} = \frac{dt_2}{0} = \frac{dt_3}{0} = \frac{dx}{t_1 t_3}\,.$$

Функции

$$F_1^1\colon (t,x) \to t_2, \ \ F_2^1\colon (t,x) \to t_3, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

являются первыми интегралами дифференциального уравнения (4).

Из уравнения в дифференциалах

$$dx - t_1 t_3\, dt_1 = 0,$$

считая t_3 постоянной, находим ещё один первый интеграл

$$F_3^1\colon (t,x) \to x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\,, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

дифференциального уравнения в частных производных (4).

Этот первый интеграл в совокупности с двумя ранее полученными первыми интегралами, будучи функционально независимыми на $\mathbb{R}^4$, образуют интегральный базис на $\mathbb{R}^4$ дифференциального уравнения (4).

Введём новые переменные

$$t_1 = t_1,\ t_2 = t_2,\ t_3 = t_3,\ u_4 = x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\,. \tag{5}$$

Поскольку

$$\mathfrak{X}_1 t_1 = 1,\ \ \mathfrak{X}_1 t_2 = \mathfrak{X}_1 t_3 = \mathfrak{X}_1\Big(x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\Big) = 0,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

то на основании уравнения (4) получим, что

$$\partial_{t_1} z = 0.$$

Учитывая тождества

$$\mathfrak{X}_2 t_1 = 0,\ \ \mathfrak{X}_2 t_2 = 1,\ \ \mathfrak{X}_2 t_3 = 0,$$

$$\mathfrak{X}_2\Big(x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\Big) = \partial_{t_2}\Big(x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\Big) + t_2 t_3\, \partial_x\Big(x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\Big) = t_2 t_3,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

на основании второго уравнения системы (3) получаем уравнение

$$\partial_{t_2} z + t_2 t_3\, \partial_{u_4} z = 0. \tag{6}$$

На основании третьего уравнения системы (3), учитывая, что на $\mathbb{R}^4$

$$\mathfrak{X}_3 t_1 = 0,\ \ \mathfrak{X}_3 t_2 = 0,\ \ \mathfrak{X}_3 t_3 = 1,$$

$$\mathfrak{X}_3\Big(x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\Big) = \partial_{t_3}\Big(x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\Big) + 0{,}5(t_1^2 + t_2^2)\partial_x\Big(x - \frac{t_1^2 t_3}{2}\Big) = \frac{t_2^2}{2}\,,$$

получаем уравнение

$$\partial_{t_3} z + \frac{t_2^2}{2}\, \partial_{u_4} z = 0.$$

Рассмотрим нормальную якобиеву линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1(t_2, t_3, u_4) z &\equiv \partial_{t_2} z + t_2 t_3\, \partial_{u_4} z = 0,\\ \mathfrak{M}_2(t_2, t_3, u_4) z &\equiv \partial_{t_3} z + 0{,}5 t_2^2\, \partial_{u_4} z = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Ассоциированной к линейному однородному уравнению в частных производных (6) (первому уравнению системы (7)) является обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dt_2}{1} = \frac{dt_3}{0} = \frac{du_4}{t_2 t_3}\,.$$

Функция

$$F_1^2\colon (t_2, t_3, u_4) \to t_3,\ \forall (t_2, t_3, u_4) \in \mathbb{R}^3,$$

является первым интегралом на пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнения (6).

Из уравнения

$$t_2 t_3 dt_2 - du_4 = 0,$$

считая t_3 постоянной, находим ещё один первый интеграл уравнения (6)

$$F_2^2\colon (t_2, t_3, u_4) \to u_4 - \frac{t_2^2 t_3}{2}\,,\ \forall (t_2, t_3, u_4) \in \mathbb{R}^3, \tag{8}$$

который в совокупности с ранее полученным первым интегралом, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов на $\mathbb{R}^3$ дифференциального уравнения (6).

Поскольку

$$\mathfrak{M}_2\Big(u_4 - \frac{t_2^2 t_3}{2}\Big) = \partial_{t_3}\Big(u_4 - \frac{t_2^2 t_3}{2}\Big) + 0{,}5 t_2^2\, \partial_{u_4}\Big(u_4 - \frac{t_2^2 t_3}{2}\Big) \equiv 0$$

на $\mathbb{R}^3$, то функция (8) является первым интегралом на $\mathbb{R}^3$ второго уравнения системы (7), а значит, и системы (7).

Система (7) якобиева, и её базис первых интегралов состоит из одного первого интеграла. Поэтому функция (8) образует базис первых интегралов нормальной якобиевой системы (7) на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Учитывая замену (5), на основании функции (8) получаем функцию

$$F\colon (t, x) \to x - \frac{t_3(t_1^2 + t_2^2)}{2}\,,\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

которая образует интегральный базис нормальной якобиевой системы (3), а значит, и общий интеграл вполне разрешимого уравнения (2).

Разрешая равенство

$$x - \frac{t_3(t_1^2 + t_2^2)}{2} = C$$

относительно x, находим решения

$$x\colon t \to \frac{t_3(t_1^2 + t_2^2)}{2} + C,\ \forall t \in \mathbb{R}^3,$$

уравнения в полных дифференциалах (2).

§ 5. Автономность и цилиндричность первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах

1. Первые интегралы s-неавтономных вполне разрешимых систем

s-неавтономная система уравнений в полных дифференциалах. (CDs). *Автономная система уравнений в полных дифференциалах.* (ACD). (ICDs). (IACD). *Условия Фробениуса полной разрешимости системы* (IACD). *Автономные и s-неавтономные первые интегралы. Количество функционально независимых s-неавтономных первых интегралов у системы* (ICDs). *Количество функционально независимых автономных первых интегралов у системы* (IACD).

Определение 1. *Систему* (CD) *назовём* ***s-неавтономной****, если все функции-элементы X_{ij} матрицы X зависят от x и только от s, $0 \leqslant s \leqslant m$, независимых переменных $t_1, \ldots, t_m$.*

Не умаляя общности, будем считать, что у s-неавтономной системы (CD) все функции-элементы X_{ij} матрицы X зависят только от x и от первых s независимых переменных, то есть,

$$dx = X({}^s t, x)dt, \tag{CDs}$$

где

$$X({}^s t, x) = \|X_{ij}({}^s t, x)\|_{n\times m}\,,\ \forall ({}^s t, x) \in \mathcal{D}^{s+n},$$

$${}^s t = (t_1, \ldots, t_s),\ \mathcal{D}^{s+n} \subset \mathbb{R}^{s+n},\ 0 \leqslant s \leqslant m.$$

При $s = 0$ система (CDs) примет вид

$$dx = X(x)\, dt, \tag{ACD}$$

её назовём ***автономной***.

Вполне разрешимые системы (CDs) и (ACD) соответственно обозначим (ICDs) и (IACD).

Будем считать, что у систем (CDs) и (ICDs) матрица X принадлежит $C^k(\mathcal{D}^{s+n})$, а у систем (ACD) и (IACD) матрица X принадлежит $C^k(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$.

Операторы

$$\mathfrak{x}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x)\partial_{x_i}, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ j = \overline{1,m}\,, \tag{1}$$

назовём *автономными* операторами дифференцирования в силу системы (ACD).

При этом для автономных операторов (1) и неавтономных операторов

$$\mathfrak{X}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \mathfrak{x}_j(x), \ \forall (t,x) \in \mathcal{D},$$

скобки Пуассона

$$\bigl[\mathfrak{X}_j(t,x), \mathfrak{X}_\zeta(t,x)\bigr] = \bigl[\mathfrak{x}_j(x), \mathfrak{x}_\zeta(x)\bigr], \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}.$$

Условиями Фробениуса для системы (ACD) будут тождества

$$\bigl[\mathfrak{x}_j(x), \mathfrak{x}_\zeta(x)\bigr] = \mathfrak{o}, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ j = \overline{1,m}\,, \ \zeta = \overline{1,m}\,. \tag{2}$$

Определение 2. *Первый интеграл F системы* (CD) *назовём **s-неавтономным**, если функция F зависит от x и только от s, $0 \leqslant s \leqslant m$, независимых переменных $t_1, \ldots, t_m$. При $s = 0$ первый интеграл*

$$F\colon x \to F(x), \ \forall x \in \mathcal{X}', \ \mathcal{X}' \subset \mathcal{X},$$

системы (CD) *назовём **автономным**.*

Матрицу, полученную из матрицы $X({}^s t, x) \in \mathbb{M}^{n,m}$ вычёркиванием первых s столбцов, обозначим ${}_sX$, ${}_sX \in \mathbb{M}^{n,(m-s)}$.

Теорема 1. *Если у системы* (ICDs) *при $X \in C^1(\mathcal{D}^{s+n})$ ранг*[4] *матрицы ${}_sX({}^s t, x)$ на области $\mathcal{D}^{s+n}$ равен k, то на этой области она имеет $n-k$ функционально независимых*

[4]Если функциональная $(n \times m)$-матрица $M \in C^1(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^s$, то существует такая подобласть $\mathcal{G}'$ области $\mathcal{G}$, дополнение $\complement_{\mathcal{G}}\mathcal{G}'$ которой имеет нулевую

s-неавтономных первых интегралов

$$F_\gamma\colon \mathcal{D}^{s+n} \to \mathbb{R},\ \gamma = \overline{1, n-k}\,.$$

Доказательство. Пусть $x\colon t \to x(t;C)$, $\forall t \in \mathcal{T}\,'$, — решения системы (ICDs). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что первые k строк матрицы ${}_sX$ образуют матрицу ранга k (этого всегда можно добиться перенумерованием зависимых переменных).

Тогда первые k составляющие x_l, $l = \overline{1,k}$, решений будут функционально независимыми на области $\mathcal{T}\,'$ относительно переменных t_τ, $\tau = \overline{s+1,m}$, а остальные $n-k$ составляющие x_r, $r = \overline{k+1,n}$, решений функционально зависят на области $\mathcal{T}\,'$ от первых k составляющих относительно переменных t_τ, $\tau = \overline{s+1,m}$.

Поэтому

$$x_r(t) = \Phi_r({}^st, {}^kx(t); C),\ \forall t \in \mathcal{T}\,',$$

где ${}^kx = (x_1, \ldots, x_k)$, а функции Φ_r, $r = \overline{k+1,n}$, непрерывно дифференцируемы.

Из функционально независимой относительно $t_{s+1}, \ldots, t_m$ на $\mathcal{T}\,'$ совокупности

$$x_l = x_l(t;C),\ l = \overline{1,k}\,, \quad x_r = \Phi_r({}^st, {}^kx; C),\ r = \overline{k+1,n}\,,$$

фиксируя произвольный вектор C векторами

$$C^i = (\delta_{i1}C_1, \ldots, \delta_{in}C_n),\ i = \overline{1,n}\,,\ \ (\delta_{ij} \text{ — символ Кронекера}),$$

находим k, не являющихся s-неавтономными, и $n-k$, являющихся s-неавтономными, функционально независимых на подобласти $\mathcal{D}'$ области $\mathcal{D}$ первых интегралов системы (ICDs). ■

меру в пространстве $\mathbb{R}^s$, что в каждой точке области $\mathcal{G}'$ ранг матрицы M является числом постоянным:

$$\operatorname{rank} M(z) = r,\ \forall z \in \mathcal{G}',\ 0 \leqslant r \leqslant \min\{m,n\},$$

а в каждой точке дополнения $\complement_{\mathcal{G}}\mathcal{G}'$ ранг матрицы M меньше числа r. При этом число r назовём ***рангом*** функциональной матрицы M на области $\mathcal{G}$.

Обратим внимание на согласованность по независимым переменным $t_1, \ldots, t_s$ в теореме между s-неавтономностью системы (ICDs) и s-неавтономностью первых интегралов, а также следствия из неё для автономных систем.

Теорема 2. *Система* (IACD) *имеет ровно* $n-k$, *где число* $k = \operatorname{rank} X(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}'$, *функционально независимых на подобласти* $\mathcal{X}'$ *области* $\mathcal{X}$ *автономных первых интегралов.*

Пример 1 (продолжение примера 1.3.1). У матрицы X вполне разрешимой автономной системы в полных дифференциалах (3.3.1) ранг

$$\operatorname{rank} X(x) = 2, \ \forall x \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}.$$

В соответствии с теоремой 2 система (3.3.1) имеет $n-k = 3-2 = 1$ автономный первый интеграл на области $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ в виде

$$F_3 \colon x \to g(x_1, x_2) - x_3, \ \forall x \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}.$$

Теорема 3. *Система* (IACD) *не имеет автономных первых интегралов тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} X(x) = n$ *для всех* x *из области* $\mathcal{X}$ *за исключением, быть может, множества точек* n*-мерной меры нуль.*

2. s-неавтономные и $(n-k)$-цилиндричные первые интегралы

$(n-k)$-цилиндричные первые интегралы системы (CD). *Необходимый признак существования s-неавтономных $(n-k)$-цилиндричных первых интегралов. Критерий существования s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного первого интеграла. Построение функционально независимых s-неавтономных $(n-k)$-цилиндричных первых интегралов.*

Определение 1. *Первый интеграл F системы* (CD) *назовём* $(\boldsymbol{n-k})$***-цилиндричным***, *если функция F зависит от t и только от k, $0 \leqslant k \leqslant n$, зависимых переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

Поставим задачу существования s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного первого интеграла

$$F \colon (t, x) \to F({}^s t, {}^k x), \ \forall (t, x) \in \mathcal{D}'. \tag{1}$$

Функция (1) будет s-неавтономным и $(n-k)$-цилиндричным первым интегралом на области $\mathcal{D}'$ системы (CD) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (определение 1.1.1)

$$\mathfrak{X}_{jsk} F({}^s t, {}^k x) = 0, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}', \ j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где

$$\mathfrak{X}_{\theta sk}(t,x) = \partial_{t_\theta} + \sum_{\xi=1}^{k} X_{\xi\theta}(t,x)\partial_{x_\xi}, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}, \ \ \theta = \overline{1,s},$$

$$\mathfrak{X}_{\nu sk}(t,x) = \sum_{\xi=1}^{k} X_{\xi\nu}(t,x)\partial_{x_\xi}, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}, \ \nu = \overline{s+1,m}.$$

Относительно совокупностей

$$M_\theta = \{1, X_{1\theta}(t,x), \ldots, X_{k\theta}(t,x)\}, \ \theta = \overline{1,s},$$

$$M_\nu = \{X_{1\nu}(t,x), \ldots, X_{k\nu}(t,x)\}, \ \nu = \overline{s+1,m},$$

система тождеств (2) означает: при всяких фиксированных значениях независимых переменных $t_\gamma, \gamma = \overline{1,m}, \gamma \neq \zeta,$ и зависимых переменных $x_i, i = \overline{1,n},$ функции каждой из совокупностей $M_j, j = \overline{1,m},$ линейно зависят по независимой переменной t_ζ на области $\mathcal{D}$; а при фиксированных значениях независимых переменных $t_\gamma, \gamma = \overline{1,m},$ и зависимых переменных $x_i, i = \overline{1,n},$ $i \neq p,$ функции каждой из совокупностей $M_j, j = \overline{1,m},$ линейно зависят по переменной x_p на области $\mathcal{D}$. Это имеет место при каждом фиксированном индексе $\zeta = \overline{s+1,m}$ и индексе $p = \overline{k+1,n}$.

Поэтому вронскианы по переменным

$$t_\zeta, \ \zeta = \overline{s+1,m}, \ \ x_p, \ p = \overline{k+1,n},$$

каждой из совокупностей $M_j, j = \overline{1,m},$ тождественно равны нулю на области $\mathcal{D}$, то есть, выполняется система тождеств

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{t_\zeta}(1, {}^kX^\theta(t,x)) = 0,\ \forall (t,x)\in\mathcal{D},\ \theta=\overline{1,s}\,,\ \zeta=\overline{s+1,m}\,;\\
&\mathrm{W}_{t_\zeta}({}^kX^\nu(t,x)) = 0,\ \forall (t,x)\in\mathcal{D},\ \nu=\overline{s+1,m}\,,\ \zeta=\overline{s+1,m}\,;\\
&\mathrm{W}_{x_p}(1, {}^kX^\theta(t,x)) = 0,\ \forall (t,x)\in\mathcal{D},\ \theta=\overline{1,s}\,,\ p=\overline{k+1,n}\,;\\
&\mathrm{W}_{x_p}({}^kX^\nu(t,x)) = 0,\ \forall (t,x)\in\mathcal{D},\ \nu=\overline{s+1,m}\,,\ p=\overline{k+1,n}\,,
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где

$$
{}^kX^j\colon (t,x)\to (X_{1j}(t,x),\dots,X_{kj}(t,x)),\ \forall (t,x)\in\mathcal{D},\ j=\overline{1,m}\,,
$$

а W_{t_ζ} и W_{x_p} — вронскианы соответственно по t_ζ и x_p.

Установленная закономерность выражает необходимый признак существования s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного первого интеграла системы уравнений в полных дифференциалах.

Теорема 1. *Система тождеств* (3) *является необходимым условием наличия у системы* (CD) *s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного первого интеграла* (1).

Пусть матрица X удовлетворяет условиям (3). Составим функциональную систему

$$
\begin{gathered}
\psi_\theta + {}^k\varphi\ {}^kX^\theta(t,x) = 0,\ \theta=\overline{1,s}\,,\\
{}^k\varphi\,\partial^\xi_{t_\nu}\ {}^kX^\theta(t,x) = 0,\ \xi=\overline{1,k}\,,\ \nu=\overline{s+1,m}\,,\ \theta=\overline{1,s}\,,\\
{}^k\varphi\,\partial^\xi_{x_p}\ {}^kX^\theta(t,x) = 0,\ \xi=\overline{1,k}\,,\ p=\overline{k+1,n}\,,\ \theta=\overline{1,s}\,,\\
{}^k\varphi\ {}^kX^\nu(t,x) = 0,\ \nu=\overline{s+1,m}\,, \qquad (4)\\
{}^k\varphi\,\partial^\xi_{t_\zeta}\ {}^kX^\nu(t,x) = 0,\ \xi=\overline{1,k-1}\,,\ \zeta=\overline{s+1,m}\,,\ \nu=\overline{s+1,m}\,,\\
{}^k\varphi\,\partial^\xi_{x_p}\ {}^kX^\nu(t,x) = 0,\ \xi=\overline{1,k-1}\,,\ p=\overline{k+1,n}\,,\ \nu=\overline{s+1,m}\,,
\end{gathered}
$$

где скалярные функции

$$\psi_\theta\colon (t,x) \to \psi_\theta({}^st, {}^kx),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ \theta = \overline{1,s},$$

являются координатами вектора-функции ${}^s\psi,$ а вектор-функция

$$^k\varphi\colon (t,x) \to \bigl(\varphi_1({}^st, {}^kx), \ldots, \varphi_k({}^st, {}^kx)\bigr),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}.$$

Введём в рассмотрение уравнение Пфаффа

$$^s\psi({}^st, {}^kx)\ d\,{}^st + {}^k\varphi({}^st, {}^kx)\ d\,{}^kx = 0 \qquad (5)$$

и докажем следующий критерий существования s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного первого интеграла у системы (CD).

Теорема 2. *Для того чтобы система* (CD) *имела s-неавтономный* $(n-k)$*-цилиндричный первый интеграл* (1), *необходимо и достаточно существования векторов-функций* ${}^s\psi$ *и* ${}^k\varphi$, *удовлетворяющих функциональной системе* (4), *таких, что функция* (1) *является общим интегралом уравнения Пфаффа* (5) *на области* $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$, *являющейся естественной проекцией области* $\mathcal{D}'$ *на координатное подпространство* O^st^kx.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (CD) имеет s-неавтономный $(n-k)$-цилиндричный первый интеграл (1) на области $\mathcal{D}'$. Тогда выполняются тождества (2):

$$\partial_{t_\theta} F({}^st, {}^kx) + \sum_{\tau=1}^{k} X_{\tau\theta}(t,x)\partial_{x_\tau} F({}^st, {}^kx) = 0,\ \theta = \overline{1,s}\,,$$

$$\sum_{\tau=1}^{k} X_{\tau\nu}(t,x)\partial_{x_\tau} F({}^st, {}^kx) = 0,\ \nu = \overline{s+1,m}\,,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}'.$$

Дифференцируя первые s тождеств k раз по $t_{s+1}, \ldots, t_m$ и k раз по $x_{k+1}, \ldots, x_n$, а остальные $m-s$ тождеств $k-1$ раз по $t_{s+1}, \ldots, t_m$ и $k-1$ раз по $x_{k+1}, \ldots, x_n$, убеждаемся, что продолжения на область $\mathcal{D}$ функций

$$^s\psi\colon ({}^st, {}^kx) \to \partial_{{}^st} F({}^st, {}^kx), \quad {}^k\varphi\colon ({}^st, {}^kx) \to \partial_{{}^kx} F({}^st, {}^kx)$$

с множеством определения $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ являются решениями функциональной системы (4), где операторы

$$\partial_{{}^s t} = (\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_s}), \quad \partial_{{}^k x} = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_k}).$$

Отсюда также следует, что функция (1) является общим интегралом на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ уравнения Пфаффа (5).

Достаточность. Пусть векторы-функции

$${}^s\psi\colon (t,x) \to {}^s\psi({}^s t, {}^k x), \ \ {}^k\varphi\colon (t,x) \to {}^k\varphi({}^s t, {}^k x), \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',$$

являются решением системы (4), а уравнение Пфаффа (5), составленное на его основании, имеет общий интеграл (1).

Тогда на $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ выполняется система тождеств

$$\partial_{{}^s t} F({}^s t, {}^k x) - {}^s\psi({}^s t, {}^k x) = 0, \ \ \partial_{{}^k x} F({}^s t, {}^k x) - {}^k\varphi({}^s t, {}^k x) = 0. \quad (6)$$

Учитывая, что функции ${}^s\psi$, ${}^k\varphi$ являются решением функциональной системы (4), получаем систему тождеств (2), и, следовательно, функция (1) является s-неавтономным $(n-k)$-цилиндричным первым интегралом системы (CD). ■

Предложенный в теореме 2 метод нахождения s-неавтономных $(n-k)$-цилиндричных первых интегралов системы (CD) может быть использован для построения некоторого количества функционально независимых s-неавтономных $(n-k)$-цилиндричных первых интегралов системы (CD).

Теорема 3. *Пусть система* (4) *имеет* q *не являющихся линейно связанными на области* $\mathcal{D}'$ *решений*

$${}^s\psi^\gamma\colon (t,x) \to {}^s\psi^\gamma({}^s t, {}^k x), \ {}^k\varphi^\gamma\colon (t,x) \to {}^k\varphi^\gamma({}^s t, {}^k x), \ \gamma = \overline{1,q}\,, \quad (7)$$

а построенные на их основании уравнения Пфаффа

$${}^s\psi^\gamma({}^s t, {}^k x)\; d\,{}^s t + {}^k\varphi^\gamma({}^s t, {}^k x)\; d\,{}^k x = 0, \ \gamma = \overline{1,q}\,, \quad (8)$$

имеют соответственно общие интегралы

$$F_\gamma\colon ({}^s t, {}^k x) \to F_\gamma({}^s t, {}^k x), \ \forall ({}^s t, {}^k x) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}, \ \gamma = \overline{1,q}\,, \quad (9)$$

на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$, *являющейся естественной проекцией области* $\mathcal{D}$ *на координатное подпространство* $O^s t^k x$. *Тогда эти общие интегралы функционально независимы на* $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$.

Доказательство. В силу (6) на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$

$$\partial_{{}^s t} F_\gamma({}^s t, {}^k x) = {}^s\psi^\gamma({}^s t, {}^k x),\ \partial_{{}^k x} F_\gamma({}^s t, {}^k x) = {}^k\varphi^\gamma({}^s t, {}^k x),\ \gamma = \overline{1, q}\,.$$

Поэтому матрица Якоби

$$\mathrm{J}(F_\gamma({}^s t, {}^k x); {}^s t, {}^k x) = \big\|\Psi({}^s t, {}^k x)\Phi({}^s t, {}^k x)\big\|$$

где матрица $\|\Psi\Phi\|$ составлена из $(q \times s)$-матрицы

$$\Psi({}^s t, {}^k x) = \big\|\psi_{\gamma j}({}^s t, {}^k x)\big\|$$

и $(q \times k)$-матрицы

$$\Phi({}^s t, {}^k x) = \big\|\varphi_{\gamma i}({}^s t, {}^k x)\big\|.$$

Ввиду линейной несвязанности векторов-функций (7) на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ ранг матрицы Якоби $\operatorname{rank} \mathrm{J}(F({}^s t, {}^k x);\ {}^s t, {}^k x) = q$ для всех $({}^s t, {}^k x)$ из области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$, за исключением, быть может, множества точек $(s+k)$-мерной меры нуль.

Следовательно, общие интегралы (9) уравнений Пфаффа (8) функционально независимы на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$. ■

§6. Последние множители системы уравнений в полных дифференциалах

1. Последний множитель

Последний множитель системы (CD). *Свойство Якоби последних множителей. Построение последних можителей по последнему множителю и первым интегралам. Функциональная связь между последними множителями и базисными первыми интегралами.*

Пусть матрица X и рассматриваемые функции будут непрерывно дифференцируемыми на области $\mathcal{D}$ пространства $\mathbb{R}^{m+n}$.

Определение 1. *Функцию* $\mu\colon \mathcal{D}\to\mathbb{R}$ *назовём* ***последним множителем*** *на области* $\mathcal{D}$ *системы* (CD), *если*

$$\mathfrak{X}_j\mu(t,x) = -\,\mu(t,x)\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_j(t,x),\ \forall (t,x)\in\mathcal{D},\ j=\overline{1,m}\,. \qquad (1)$$

Установим аналитические связи между последними множителями и первыми интегралами.

Свойство 1 (*свойство Якоби*). *Если* μ_1 *и* μ_2 *есть последние множители на области* $\mathcal{D}$ *системы* (CD), *то функция*

$$J\colon (t,x)\to \frac{\mu_1(t,x)}{\mu_2(t,x)}\,,\ \forall (t,x)\in\mathcal{D}'_2,\ \mathcal{D}'_2\subset\mathcal{D}, \qquad (2)$$

является первым интегралом на области $\mathcal{D}'_2$ *системы* (CD), *при этом область* $\mathcal{D}'_2$ *устанавливается так, чтобы последний множитель* $\mu_2(t,x)\neq 0,\ \forall (t,x)\in\mathcal{D}'_2$.

Доказательство является непосредственным следствием из определений первого интеграла и последнего множителя:

$$\mathfrak{X}_jJ = \frac{\mu_2\mathfrak{X}_j\mu_1 - \mu_1\mathfrak{X}_j\mu_2}{\mu_2^2} = \frac{-\mu_2\mu_1\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_j + \mu_1\mu_2\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_j}{\mu_2^2} \equiv 0. \ \blacksquare$$

Предложение 1. *Если функция* μ_2 *является последним множителем на области* $\mathcal{D}$, *а скалярные функции* (1.2.1) *— первыми интегралами на области* $\mathcal{D}'$ *системы* (CD), *то* *функция*

$$\mu_1\colon (t,x) \to \mu_2(t,x)\Phi(F(t,x)),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',$$

где Φ *— произвольная непрерывно дифференцируемая функция, будет последним множителем на области* $\mathcal{D}'$ *этой системы.*

Доказательство. Предложение 1 предполагает выполнение условий теоремы 1.2.1, по которой

$$\mathfrak{X}_j\Phi(F(t,x)) = 0,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',\ \ j = \overline{1,m}\,,$$

и на области $\mathcal{D}'$

$$\mathfrak{X}_j\mu_1 = \Phi(F)\mathfrak{X}_j\mu_2 + \mu_2\mathfrak{X}_j\Phi(F) = -\mu_2\Phi(F)\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_j = -\mu_1\mathrm{div}\mathfrak{X}_j. \blacksquare$$

Это предложение является достаточным условием критерия

Теорема 1. *Если функция* μ_2 *является последним множителем на области* $\mathcal{D}$ *системы* (CD)*, а функции* (1.2.1) *образуют базис первых интегралов на области* $\mathcal{D}'$ *этой системы, то функция* μ_1 *будет последним множителем на подобласти* $\mathcal{D}''$ *области* $\mathcal{D}'$ *системы* (CD) *тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$\mu_1(t,x) = \mu_2(t,x)\Phi(F(t,x)),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}'', \tag{3}$$

где Φ *— некоторая непрерывно дифференцируемая функция.*

Доказательство. Необходимость. Если μ_1 и μ_2 — последние множители системы (CD), то по свойству Якоби последних множителей функция (2) является первым интегралом на подобласти $\mathcal{D}_2'$ области $\mathcal{D}$ системы (CD).

Функции (1.2.1) образуют базис первых интегралов на области $\mathcal{D}'$ системы (CD).

Тогда функция J на области $\mathcal{D}'' = \mathcal{D}_2' \cap \mathcal{D}'$ представима в виде

$$J(t,x) = \Phi(F(t,x)),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}'',$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. $\blacksquare$

Отсюда с учётом теоремы 1.3.1 получаем

Следствие 1. *Если функция* μ_2 *есть последний множитель на области* $\mathcal{D}$ *голоморфной системы* (ICD)*, то функция* μ_1 *будет последним множителем на подобласти* $\mathcal{D}''$ *области* $\mathcal{D}'$ *этой системы тогда и только тогда, когда она представима в виде* (3)*, где функции* $F_i,\ i = \overline{1,n}$ *, суть функционально независимые первые интегралы на области* $\mathcal{D}'$ *системы* (ICD)*,* Φ *— некоторая голоморфная функция.*

Свойство 2. *Функция* μ *является последним множителем на области* $\mathcal{D}$ *системы* (CD)*, тогда и только тогда, когда векторные поля*

$$u^j(t,x) = \mu(t,x)b^j(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ j = \overline{1,m}\,,$$

где

$$b^j(t,x) = \big(\delta_{1j},\ldots,\delta_{mj},X_{1j}(t,x),\ldots,X_{nj}(t,x)\big),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},$$

$$j = \overline{1,m}\,,\ (\delta_{\zeta j}\ \text{— символ Кронекера}),$$

являются соленоидальными на области $\mathcal{D}$.

Действительно, μ — последний множитель системы (CD), тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{X}_j\mu(t,x) = -\mu(t,x)\,\mathrm{div}\,b^j(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ j = \overline{1,m}\,.$$

При этом на области $\mathcal{D}$ у векторных полей $u^j,\ j = \overline{1,m}$, расходимости

$$\mathrm{div}(\mu b^j) = b^j \cdot \mathrm{grad}\,\mu + \mu\,\mathrm{div}\,b^j = \mathfrak{X}_j\mu + \mu\,\mathrm{div}\,b^j =$$

$$= -\mu\,\mathrm{div}\,b^j + \mu\,\mathrm{div}\,b^j \equiv 0. \blacksquare$$

2. s-неавтономные $(n-k)$-цилиндричные последние множители

s-неавтономный последний множитель системы (CD). *$(n-k)$-цилиндричный последний множитель системы* (CD). *Необходимый признак существования s-неавтономных $(n-k)$-цилиндричных последних множителей. Критерий существования s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного последнего множителя. Построение функционально независимых s-неавтономных $(n-k)$-цилиндричных последних множителей.*

Сохраняя подход и обозначения, принятые в параграфе 5, а также считая, что матрица X и рассматриваемые функции являются непрерывно дифференцируемыми достаточное число раз, введём следующие понятия.

Определение 1. *Последний множитель μ системы* (CD) *назовём s-**неавтономным**, если функция μ зависит от x и только от $s, 0 \leqslant s \leqslant m$, независимых переменных $t_1, \ldots, t_m$. При $s=0$ последний множитель*

$$\mu\colon x \to \mu(x),\ \forall x \in \mathcal{X}',\ \mathcal{X}' \subset \mathcal{X},$$

системы (CD) *назовём **автономным**.*

Определение 2. *Последний множитель μ системы* (CD) *назовём $(n-k)$-**цилиндричным**, если функция μ зависит от t и только от $k, 0 \leqslant k \leqslant n$, зависимых переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

Система (CD) имеет s-неавтономный $(n-k)$-цилиндричный последний множитель

$$\mu\colon (t,x) \to \mu\big({}^{s}t, {}^{k}x\big),\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',\ \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}, \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_{jsk}\mu\big({}^{s}t, {}^{k}x\big) + \mu\big({}^{s}t, {}^{k}x\big)\operatorname{div}_x X^j(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathcal{D}', j=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Методом, аналогичным методу доказательства теоремы 1.2.5, доказываем *необходимый признак существования s-неавтономного $(n-k)$-цилиндричного последнего множителя.*

Теорема 1. *Для того чтобы система* (CD) *имела s-неавтономный $(n-k)$-цилиндричный последний множитель* (1), *необходимо выполнение системы тождеств*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{t_\nu}\big(1, {}^kX^\theta(t,x), \mathrm{div}_x X^\theta(t,x)\big) \equiv 0,\ \theta = \overline{1,s}\,,\ \nu = \overline{s+1,m}\,,\\
&\mathrm{W}_{t_\nu}\big({}^kX^j(t,x), \mathrm{div}_x X^j(t,x)\big) \equiv 0,\ j = \overline{s+1,m}\,,\ \nu = \overline{s+1,m}\,,\\
&\mathrm{W}_{x_p}\big(1, {}^kX^\theta(t,x), \mathrm{div}_x X^\theta(t,x)\big) \equiv 0,\ \theta = \overline{1,s}\,,\ p = \overline{k+1,n}\,,\\
&\mathrm{W}_{x_p}\big({}^kX^\nu(t,x), \mathrm{div}_x X^\nu(t,x)\big) \equiv 0,\ \nu = \overline{s+1,m}\,,\ p = \overline{k+1,n}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Пусть матрица X удовлетворяет условиям (3).
Составим функциональную систему

$$
\begin{gathered}
\psi_\theta + {}^k\varphi\,{}^kX^\theta(t,x) = -\,\mathrm{div}_x X^\theta(t,x),\\
{}^k\varphi\,\partial^\xi_{t_\nu}\,{}^kX^\theta(t,x) = -\,\partial^\xi_{t_\nu}\mathrm{div}_x X^\theta(t,x),\ \xi = \overline{1,k+1}\,,\\
{}^k\varphi\,\partial^\xi_{x_p}\,{}^kX^\theta(t,x) = -\,\partial^\xi_{x_p}\mathrm{div}_x X^\theta(t,x),\ \xi = \overline{1,k+1}\,,\\
{}^k\varphi\,{}^kX^\nu(t,x) = -\,\mathrm{div}_x X^\nu(t,x),\\
{}^k\varphi\,\partial^\xi_{t_\zeta}\,{}^kX^\nu(t,x) = -\,\partial^\xi_{t_\zeta}\mathrm{div}_x X^\nu(t,x),\ \xi = \overline{1,k}\,,\\
{}^k\varphi\,\partial^\xi_{x_p}\,{}^kX^\nu(t,x) = -\,\partial^\xi_{x_p}\mathrm{div}_x X^\nu(t,x),\ \xi = \overline{1,k}\,,\\
\theta = \overline{1,s}\,,\ \nu = \overline{s+1,m}\,,\ p = \overline{k+1,n}\,,\ \zeta = \overline{s+1,m}\,.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Теорема 2 (*критерий существования s-неавтономного и $(n-k)$-цилиндричного последнего множителя*). *Для того чтобы система* (CD) *имела s-неавтономный $(n-k)$-цилиндричный последний множитель* (1), *необходимо и достаточно существования таких векторов-функций ${}^s\psi$ и ${}^k\varphi$, удовлетворяющих функциональной системе* (4), *что составленное на* *их основании уравнение Пфаффа* (5.2.5) *является точным на области* $\mathcal{D}^{s+k}$. *При этом последний множитель* (1) *системы* (CD) *имеет вид*

$$\mu\colon (t,x) \to \exp g({}^s t, {}^k x), \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}', \tag{5}$$

где

$$g\big({}^s t, {}^k x\big) = \int {}^s\psi\big({}^s t, {}^k x\big)\, d\,{}^s t + {}^k\varphi\big({}^s t, {}^k x\big)\, d\,{}^k x, \ \forall \big({}^s t, {}^k x\big) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Если система (CD) имеет последний множитель (1), то выполняется система тождеств

$$\partial_{t_\theta} \mu\big({}^s t, {}^k x\big) + \sum_{\tau=1}^{k} X_{\tau\theta}(t,x)\partial_{x_\tau} \mu\big({}^s t, {}^k x\big) + \mu\big({}^s t, {}^k x\big)\operatorname{div}_x X^\theta(t,x) = 0,$$

$$\sum_{\tau=1}^{k} X_{\tau\nu}(t,x)\partial_{x_\tau} \mu\big({}^s t, {}^k x\big) + \mu\big({}^s t, {}^k x\big)\operatorname{div}_x X^\nu(t,x) = 0, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}',$$

где $\theta = \overline{1,s}$, $\nu = \overline{s+1,m}$. Выполнив почленное деление каждого тождества на $\mu({}^s t, {}^k x)$, получим новую систему тождеств

$$\partial_{t_\theta} \ln \mu\big({}^s t, {}^k x\big) + \sum_{\tau=1}^{k} X_{\tau\theta}(t,x)\partial_{x_\tau} \ln \mu\big({}^s t, {}^k x\big) + \operatorname{div}_x X^\theta(t,x) = 0,$$

$$\sum_{\tau=1}^{k} X_{\tau\nu}(t,x)\partial_{x_\tau} \ln \mu\big({}^s t, {}^k x\big) + \operatorname{div}_x X^\nu(t,x) = 0, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}'_0,$$

где $\theta = \overline{1,s}$, $\nu = \overline{s+1,m}$, $\mathcal{D}'_0 \subset \mathcal{D}'$.

Дифференцируя первые s тождеств k раз по $t_{s+1}, \ldots, t_m$ и k раз по $x_{k+1}, \ldots, x_n$, а остальные $m-s$ тождеств $k-1$ раз по $t_{s+1}, \ldots, t_m$ и $k-1$ раз по $x_{k+1}, \ldots, x_n$, убеждаемся, что решениями системы (4) являются продолжения на область $\mathcal{D}$ функций

$$ {}^{s}\psi\colon \bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr) \to \partial_{{}^{s}t} \ln \mu\bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr), \ \ {}^{k}\varphi\colon \bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr) \to \partial_{{}^{k}x} \ln \mu\bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr), \qquad (7) $$

с областью определения $\mathrm{D}\,{}^{s}\psi = \mathrm{D}\,{}^{k}\varphi = \widetilde{\mathcal{D}}_0^{s+k}$.

Уравнение Пфаффа (5.2.5), составленное из функций (7), является точным на области $\widetilde{\mathcal{D}}_0^{s+k}$.

Из задания (7) следует, что s-неавтономный $(n-k)$-цилиндричный последний множитель μ системы (CD) строится на основании решений системы (4) по формуле (5) при (6).

Сужая область $\mathcal{D}$ до её подобласти $\mathcal{D}_0'$, получаем утверждение теоремы 2 в части необходимости.

Достаточность. Пусть функции ${}^{s}\psi$ и ${}^{k}\varphi$ являются решением функциональной системы (4), а уравнение Пфаффа (5.2.5), составленное на их основании, является точным на области $\mathcal{D}^{s+k}$.

Тогда на $\mathcal{D}^{s+k}$

$$ \partial_{t_\theta} g\bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr) = \psi\bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr),\ \partial_{x_\xi} g\bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr) = \varphi\bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr),\ \theta = \overline{1,s}\,,\ \xi = \overline{1,k}\,. $$

Учитывая, что функции ψ_θ, $\theta = \overline{1,s}\,$, φ_ξ, $\xi = \overline{1,k}\,$, являются решениями функциональной системы (4), получаем, что относительно функции (5) при (6) выполняется система тождеств (2).

Следовательно, функция (5) при (6) является s-неавтономным $(n-k)$-цилиндричным последним множителем системы (CD). ■

Этот метод может быть использован для построения функционально независимых последних множителей системы (CD).

Теорема 3. *Пусть система* (4) *имеет q не являющихся линейно связанными на области $\mathcal{D}$ решений* (7.2.5), *для которых соответствующие уравнения Пфаффа* (8.2.5) *являются точными на области $\mathcal{D}^{s+k}$. Тогда s-неавтономные $(n-k)$-цилиндричные последние множители системы* (CD)

$$ \mu_\gamma\colon (t,x) \to \exp \int {}^{s}\psi^{\gamma}\bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr)\, d\,{}^{s}t + {}^{k}\varphi^{\gamma}\bigl({}^{s}t, {}^{k}x\bigr)\, d\,{}^{k}x,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}, $$

где $\gamma = \overline{1,q}\,$, функционально независимы на области $\mathcal{D}$.

Доказательство. То, что последние множители μ_γ, $\gamma = \overline{1,q}\,$, системы (CD) имеют указанные виды, следует из теоремы 2.

Из представлений

$$\partial_{t_\theta} \ln \mu_\gamma \big({}^s t, {}^k x\big) = \psi_{\gamma\theta} \big({}^s t, {}^k x\big), \ \ \partial_{x_\xi} \ln \mu_\gamma \big({}^s t, {}^k x\big) = \varphi_{\gamma\xi} \big({}^s t, {}^k x\big),$$

$$\theta = \overline{1, s}\,, \ \xi = \overline{1, k}\,, \ \gamma = \overline{1, q}\,, \ \ \forall ({}^s t, {}^k x) \in \mathcal{D}^{s+k},$$

следует, что матрица Якоби

$$\mathrm{J}\,\big(\ln \mu_\gamma({}^s t, {}^k x); {}^s t, {}^k x\big) = \big\|\Psi({}^s t, {}^k x)\ \Phi({}^s t, {}^k x)\big\|_{q\times(s+k)}$$

состоит из $(q \times s)$-матрицы

$$\Psi({}^s t, {}^k x) = \big\|\psi_{\gamma\theta}({}^s t, {}^k x)\big\|$$

и $(q \times k)$-матрицы

$$\Phi({}^s t, {}^k x) = \big\|\varphi_{\gamma\xi}({}^s t, {}^k x)\big\|\,.$$

Ввиду того что решения (7.2.5) функциональной системы (4) не являются линейно связанными на $\mathcal{D}$, ранг матрицы Якоби $\operatorname{rank} \mathrm{J}\,\big(\ln \mu_\gamma({}^s t, {}^k x); {}^s t, {}^k x\big) = q$ почти везде на области $\mathcal{D}^{s+k}$.

Поэтому s-неавтономные $(n-k)$-цилиндричные последние множители $\mu_\gamma,\ \gamma = \overline{1, q}\,,$ системы (CD) функционально независимы на области $\mathcal{D}$. ■

Глава II

ЧАСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интегральные многообразия

1. Интегральные гиперповерхности

Интегральные гиперповерхности системы уравнений в полных дифференциалах (CD). *Критерий, по которому многообразие является интегральной гиперповерхностью вполне разрешимой системы уранений в полных дифференциалах. Интегральные гиперповерхности, определяемые последними множителями.*

Определение 1. *Многообразие*

$$\big\{(t,x)\colon w(t,x)=0\big\}, \tag{1}$$

заданное с помощью непрерывно дифференцируемой на области $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}$, *функции* $w\colon \mathcal{D}'\to\mathbb{R}$, *назовём **интегральной гиперповерхностью** системы уравнений в полных дифференциалах* (CD), *если производные Ли в силу системы* (CD) *функции* w *равны нулю на многообразии* (1), *то есть,*

$$\mathfrak{X}_j w(t,x)=\Phi_j(t,x),\ \forall (t,x)\in\mathcal{D}',\ j=\overline{1,m}\,, \tag{2}$$

причём функции $\Phi_j\colon \mathcal{D}'\to\mathbb{R}$, $j=\overline{1,m}$, *таковы, что*

$$\Phi_j(t,x)\big|_{w(t,x)=0}=0,\ j=\overline{1,m}\,. \tag{3}$$

Дифференциал в силу системы (CD) функции w равен

$$dw(t,x)\big|_{\text{(CD)}}=\sum_{j=1}^{m}\partial_{t_j}w(t,x)\,dt_j+\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}w(t,x)\,dx_i\big|_{\text{(CD)}}=$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{X}_j w(t,x)\, dt_j,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}'.$$

Поэтому система тождеств (2) при условиях (3) равносильна тому, что дифференциал функции w в силу системы (CD) тождественно равен нулю на $(m+n-1)$-мерном многообразии (1):

$$dw(t,x)\big|_{(\mathrm{CD})} = \Phi(t,x)\, dt,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D}', \tag{4}$$

где функция $\Phi\colon (t,x) \to \big(\Phi_1(t,x), \ldots, \Phi_m(t,x)\big)$, $\forall (t,x) \in \mathcal{D}'$, удовлетворяет условиям (3).

Вполне очевидно (непосредственно следует из определения интегральной гиперповерхности и определения первого интеграла (определение 1.1.1.1) системы (CD)), что любая гиперповерхность $\big\{(t,x)\colon F(t,x) - C = 0\big\}$, где C — фиксированная вещественная постоянная, а F — первый интеграл системы (CD), является интегральной гиперповерхностью этой системы уравнений в полных дифференциалах. Но не всякая интегральная гиперповерхность входит в совокупность интегральных гиперповерхностей какого-либо первого интеграла. При этом существенное значение имеет условие полной разрешимости.

В случае когда система (CD) не является вполне разрешимой, возможны ситуации наличия у неё интегральных гиперповерхностей при отсутствии первых интегралов.

Например, системы (4.0.3.1) и (7.0.3.1) не имеют ни решений, ни первых интегралов. При этом система (7.0.3.1) имеет две интегральные гиперповерхности $\big\{(t_1,t_2,x_1,x_2)\colon x_1 = 0\big\}$ и $\big\{(t_1,t_2,x_1,x_2)\colon x_2 = 0\big\}$.

Не вполне разрешимые системы (CD) с дискретным (конечным или бесконечным) числом интегральных гиперповерхностей или определяющие только изолированные интегральные гиперповерхности, составляют особый класс дифференциальных систем со специальными методами их исследования.

В случае полной разрешимости из тождества (4) при условиях (3) следует критерий того, что многообразие (1) является интегральной гиперповерхностью системы (ICD) (доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.1.1).

Теорема 1. *Многообразие* (1) *является интегральной гиперповерхностью системы* (ICD), *если и только если функция* w *обращается в тождественный нуль вдоль любого решения системы* (ICD).

Обратим внимание на такую закономерность, которая непосредственно следует из определения последнего множителя (определение 1.1.6.1) и определения интегральной гиперповерхности (определение 1) системы (CD).

Предложение 1. *Если последний множитель* $\mu\colon \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ *системы* (CD) *определяет многообразие* $\bigl\{(t,x)\colon \mu(t,x)=0\bigr\}$, *то оно является интегральной гиперповерхностью этой системы уравнений в полных дифференциалах.*

Пусть $\mu\colon \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ является последним множителем системы (CD). Тогда производные Ли

$$\mathfrak{X}_j\, \mu^{-1}(t,x) = \,-\,\mu^{-2}(t,x)\, \mathfrak{X}_j \mu(t,x) = \mu^{-1}(t,x)\operatorname{div}\mathfrak{X}(t,x),$$

$$\forall (t,x)\in \mathcal{D}'_0,\ j=\overline{1,m}\,,\ \mathcal{D}'_0\subset \mathcal{D}'.$$

Отсюда в соответствии с определением 1 заключаем

Предложение 2. *Если последний множитель* $\mu\colon \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ *системы уравнений в полных дифференциалах* (CD) *определяет многообразие* $\bigl\{(t,x)\colon\, \mu^{-1}(t,x)=0\bigr\}$, *то оно является интегральной гиперповерхностью системы* (CD).

2. s-неавтономные $(n-k)$-цилиндричные интегральные гиперповерхности

Автономные, s-неавтономные и $(n-k)$-цилиндричные интегральные гиперповерхности. Необходимый признак существования s-неавтономных $(n-k)$-цилиндричных интегральных гиперповерхностей. Критерий существования s-неавтономной $(n-k)$-цилиндричной интегральной гиперповерхности. Функционально независимые s-неавтономные $(n-k)$-цилиндричные интегральные гиперповерхности.

Сохраняя подход и обозначения, принятые в параграфе 5 главы I, а также считая, что рассматриваемые функции являются непрерывно дифференцируемыми достаточное число раз, введём следующие понятия.

Определение 1. *Интегральную гиперповерхность* (1.1) *системы* (CD) *назовём* ***s*-неавтономной**, *если функция* w *зависит от* x *и только от* s, $0 \leqslant s \leqslant m$, *независимых переменных* $t_1, \ldots, t_m$. *При* $s = 0$ *интегральную гиперповерхность* $\{x\colon w(x) = 0\}$, *заданную функцией* $w\colon \mathcal{X}' \to \mathbb{R}$, *где* $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, *системы* (CD) *назовём* ***автономной***.

Если функция w *зависит от* t *и только от* k, $0 \leqslant k \leqslant n$, *зависимых переменных* $x_1, \ldots, x_n$, *то интегральную гиперповерхность* (1.1) *системы* (CD) *назовём* $\boldsymbol{(n-k)}$***-цилиндричной***.

Система (CD) имеет s-неавтономную $(n-k)$-цилиндричную интегральную гиперповерхность

$$\bigl\{(t,x)\colon w({}^st, {}^kx) = 0\bigr\} \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_{jsk} w({}^st, {}^kx) = \Phi_j(t,x), \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}', \ j = \overline{1,m}\,, \ \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}, \tag{2}$$

при условиях

$$\Phi_j(t,x)\big|_{w({}^st, {}^kx)=0} = 0, \ j = \overline{1,m}\,. \tag{3}$$

Методом, аналогичным методу доказательства теоремы 1.2.5.1, доказываем *необходимый признак существования s-неавтономной $(n-k)$-цилиндричной интегральной гиперповерхности.*

Теорема 1. *Для того чтобы система* (CD) *имела s-неавтономную $(n-k)$-цилиндричную интегральную гиперповерхность* (1), *необходимо выполнение на области* $\mathcal{D}$ *системы тождеств*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{t_\nu}(1, {}^kX^\theta(t,x)) \equiv \overset{*}{\Psi}_{\theta\nu}(t,x), \ \theta = \overline{1,s}\,, \ \nu = \overline{s+1,m}\,,\\
&\mathrm{W}_{t_\nu}({}^kX^j(t,x)) \equiv \overset{*}{\Psi}_{j\nu}(t,x), \ j = \overline{s+1,m}\,, \ \nu = \overline{s+1,m}\,,\\
&\mathrm{W}_{x_p}(1, {}^kX^\theta(t,x)) \equiv \overset{**}{\Psi}_{\theta p}(t,x), \ \theta = \overline{1,s}\,, \ p = \overline{k+1,n}\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\mathrm{W}_{x_p}\left({}^kX^{\nu}(t,x)\right) \equiv \overset{**}{\Psi}_{\nu p}(t,x),\ \nu=\overline{s+1,m}\,,\ p=\overline{k+1,n}\,,$$

где функции $\overset{*}{\Psi}_{j\nu}\colon \mathcal{D}\to\mathbb{R}$ *и* $\overset{**}{\Psi}_{jp}\colon \mathcal{D}\to\mathbb{R}$ *такие, что*

$$\overset{*}{\Psi}_{j\nu}(t,x)\big|_{w({}^st,{}^kx)=0}=0,\quad \overset{**}{\Psi}_{jp}\,(t,x)\big|_{w({}^st,{}^kx)=0}=0,$$

$$j=\overline{1,m}\,,\ \nu=\overline{s+1,m}\,,\ p=\overline{k+1,n}\,.$$

Пусть матрица X удовлетворяет условиям (4). Составим функциональную систему

$$\psi_\theta+{}^k\varphi\ {}^kX^{\theta}(t,x)=H_\theta(t,x),\ \theta=\overline{1,s}\,,$$

$${}^k\varphi\,\partial^{\xi}_{t_\nu}\ {}^kX^{\theta}(t,x)=\partial^{\xi}_{t_\nu}H_\theta(t,x),\ \xi=\overline{1,k}\,,$$

$${}^k\varphi\,\partial^{\xi}_{x_p}\ {}^kX^{\theta}(t,x)=\partial^{\xi}_{x_p}H_\theta(t,x),\ \xi=\overline{1,k}\,,$$

$${}^k\varphi\ {}^kX^{\nu}(t,x)=H_\nu(t,x), \tag{5}$$

$${}^k\varphi\,\partial^{\xi}_{t_\zeta}\ {}^kX^{\nu}(t,x)=\partial^{\xi}_{t_\zeta}H_\nu(t,x),\ \xi=\overline{1,k-1}\,,$$

$${}^k\varphi\,\partial^{\xi}_{x_p}\ {}^kX^{\nu}(t,x)=\partial^{\xi}_{x_p}H_\nu(t,x),\ \xi=\overline{1,k-1}\,,$$

$$\theta=\overline{1,s}\,,\ \nu=\overline{s+1,m}\,,\ p=\overline{k+1,n}\,,\ \zeta=\overline{s+1,m}\,,$$

где функции $H_j\colon \mathcal{D}\to\mathbb{R},\ j=\overline{1,m}\,,$ таковы, что

$$H_j(t,x)\big|_{w({}^st,{}^kx)=0}=0,\ j=\overline{1,m}\,. \tag{6}$$

Система (4.2.6.1) — частный случай системы (5), когда

$$H_j(t,x)\equiv\ -\operatorname{div}_x X^j(t,x).$$

Подобно теоремам 2.2.6.1 и 3.2.6.1 доказываем аналогичные утверждения относительно интегральных гиперповерхностей.

Теорема 2 (*критерий существования s-неавтономной $(n-k)$-цилиндричной интегральной гиперповерхности*). *Для того чтобы система* (CD) *имела s-неавтономную $(n-k)$-цилиндричную интегральную гиперповерхность* (1), *необходимо и достаточно существования векторов-функций ${}^s\psi$ и ${}^k\varphi$, удовлетворяющих функциональной системе* (5), *а также скалярных функций H_j, $j=\overline{1,m}$, при условии* (6), *таких, что уравнение Пфаффа* (5.2.5.1) *имеет интегрирующий множитель, после умножения на который получаем точное уравнение Пфаффа с общим интегралом*

$$w\colon ({}^s t, {}^k x) \to w({}^s t, {}^k x),\ \forall ({}^s t, {}^k x) \in \mathcal{D}^{s+k}.$$

Теорема 3. *Пусть h функциональных систем* (5) *имеют q не являющихся линейно связанными на области $\mathcal{D}$ решений* (7.2.5.1), *для которых соответствующие уравнения Пфаффа* (8.2.5.1) *имеют общий интеграл*

$$w_\gamma\colon ({}^s t, {}^k x) \to w_\gamma({}^s t, {}^k x),\ \forall ({}^s t, {}^k x) \in \mathcal{D}^{s+k},\ \ \gamma=\overline{1,q}\,. \qquad (7)$$

Тогда эти общие интегралы функционально независимы на области $\mathcal{D}^{s+k}$.

Общие интегралы (7) систем уравнений Пфаффа (8.2.5.1) определяют s-неавтономные $(n-k)$-цилиндричные интегральные гиперповерхности

$$\bigl\{(t,x)\colon w_\gamma({}^s t, {}^k x)=0\bigr\},\ \gamma=\overline{1,q}\,, \qquad (8)$$

системы уравнений в полных дифференциалах (CD).

В этой связи теорема 3 указывает *условия функциональной независимости на области $\mathcal{D}$ s-неавтономных $(n-k)$-цилиндричных интегральных гиперповерхностей* (8) *системы* (CD).

§2. Интегралы неавтономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах

1. Неавтономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах

Система (PCD).

Систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = P(t,x)\,dt, \tag{PCD}$$

где матрица $P(t,x) = \big\|P_{ij}(t,x)\big\|_{n\times m}$ определена на множестве $\mathcal{P} = \mathcal{T}\times\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}\subset\mathbb{R}^m$, а её элементы $P_{ij}\colon \mathcal{P}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, суть полиномы относительно зависимых переменных x с голоморфными на области $\mathcal{T}$ по независимым переменным t коэффициентами, назовём *полиномиальной*. Вполне разрешимую систему (PCD) обозначим (IPCD).

Относительно полиномов P_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, условимся, что степени по x полиномов $P_{1j},\ldots,P_{nj}$ при каждом фиксированном j таковы, что $\deg_x P_{ij}(t,x)\leqslant p_j$ для всех $i=\overline{1,n}$ и хотя бы у одного из полиномов $P_{1j},\ldots,P_{nj}$ степень по x равна p_j:

$$\max_{i=\overline{1,n}}\big\{\deg_x P_{ij}(t,x)\big\} = p_j,\ \ j=\overline{1,m},\ \ \max_{j=\overline{1,m}}\big\{p_j\big\} = p.$$

Индуцированные системой (PCD) операторы

$$\mathfrak{P}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(t,x)\partial_{x_i},\ \forall (t,x)\in\mathcal{P},\ j=\overline{1,m}, \tag{1}$$

являются операторами дифференцирования в силу этой системы.

Основываясь на алгебраичности задания полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах, для неё введём специальные интегральные характеристики (интегральные инварианты), построенные на полиномиальной основе.

2. Полиномиальные частные интегралы

Полиномиальный частный интеграл. Интегральная гиперповерхность, определяемая полиномиальным частным интегралом. Произведение полиномиальных частных интегралов. Полиномиальные частные интегралы, определяемые последними множителями. Построение первого интеграла по полиномиальным частным интегралам в случае, когда производные Ли в силу системы (PCD) *полиномиальных частных интегралов пропорциональны этим полиномиальным частным интегралам.*

Определение 1. *Скалярную функцию*

$$w\colon (t,x) \to w(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathcal{P},\ \mathcal{P} = \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n,\ \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

являющуюся полиномом по x *с голоморфными на области* $\mathcal{T}$ *по* t *коэффициентами, назовём* ***полиномиальным частным интегралом*** *системы* (PCD)*, если производные Ли в силу системы* (PCD) *функции* w *равны*

$$\mathfrak{P}_j w(t,x) = w(t,x) W_j(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathcal{P},\ \ j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где функции W_j *— полиномы по* x *с голоморфными на области* $\mathcal{T}$ *по* t *коэффициентами.*

Непосредственно по определениям интегральной гиперповерхности и полиномиального частного интеграла заключаем

Предложение 1. *Если полиномиальный частный интеграл* (1) *системы* (PCD) *определяет многообразие*

$$\bigl\{(t,x)\colon w(t,x) = 0\bigr\}, \tag{3}$$

то оно будет интегральной гиперповерхностью этой полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах.

Пример 1. Полиномиальная 1-неавтономная система

$$dx_1 = \Bigl(\frac{x_1}{t_1} + t_1 x_2\Bigr) dt_1 + t_1 x_2\, dt_2,$$

$$dx_2 = \Bigl(-1 - \frac{x_1}{t_1} + \frac{x_1^2}{t_1^2} + x_2^2\Bigr) dt_1 + \Bigl(-1 - \frac{x_1}{t_1} + \frac{x_1^2}{t_1^2} + x_2^2 - x_2 x_3\Bigr) dt_2, \tag{4}$$

$$dx_3 = x_2 x_3\, dt_1 + x_2 (x_2 + x_3)\, dt_2$$

имеет 1-неавтономный полиномиальный частный интеграл

$$w\colon (t,x) \to -1 + \frac{x_1^2}{t_1^2} + x_2^2 + x_3^2,\ \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3,\ \mathcal{T} \subset \{(t_1,t_2)\colon t_1 \neq 0\}.$$

А определяемое им многообразие

$$\bigl\{(t,x)\colon x_1^2 + t_1^2 x_2^2 + t_1^2 x_3^2 - t_1^2 = 0\bigr\}$$

является 1-неавтономной интегральной гиперповерхностью системы (4).

Наряду с этим существуют полиномиальные частные интегралы (1), которые не обращаются в нуль[5] ни в одной точке области $\mathcal{P}$. Они не определяют многообразия (3), а значит, таким полиномиальным частным интегралом (1) системы (PCD) не соответствуют интегральные гиперповерхности.

Непосредственно вычислениями, основываясь на определениях используемых понятий, доказываем следующие свойства полиномиальных частных интегралов.

Свойство 1. *У системы* (PCD) *всякий последний множитель μ, являющийся полиномом по x с голоморфными по t коэффициентами, будет полиномиальным частным интегралом этой системы.*

Свойство 2. *Пусть функция ν является полиномом по x с голоморфными по t коэффициентами, а построенная на её основании функция*

$$\mu\colon (t,x) \to \frac{1}{\nu(t,x)}\,,\ \forall (t,x) \in \mathcal{P}_0,\ \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P},$$

является последним множителем системы (PCD). *Тогда функция ν будет полиномиальным частным интегралом этой системы.*

Свойство 3. *Если функция w является полиномиальным частным интегралом системы* (PCD)*, то и функция αw при любом числе $\alpha \neq 0$ будет полиномиальным частным интегралом этой системы.*

Поэтому всякий раз, говоря о двух и более полиномиальных частных интегралах, будем считать их попарно линейно независимыми функциями.

[5] Такая ситуация имеет место в ближайшем примере 2.

Свойство 4. *Произведение* $w_1 w_2$ *полиномов* w_1 *и* w_2 *по* x *с голоморфными по* t *коэффициентами является полиномиальным частным интегралом системы* (PCD)*, если и только если полиномы-сомножители* w_1 *и* w_2 *являются полиномиальными частными интегралами этой системы.*

Свойство 5. *Функция* w *является полиномиальным частным интегралом системы* (PCD)*, тогда и только тогда, когда функция* w^k*, где* k *— любое натуральное число, будет полиномиальным частным интегралом этой системы.*

Свойство 6. *Если скалярные функции* w_1 *и* w_2 *являются такими полиномиальными частными интегралами системы* (PCD)*, что выполняются тождества*

$$\mathfrak{P}_j w_1(t,x) \equiv w_1(t,x) W_j(t,x) \ \ \text{и} \ \ \mathfrak{P}_j w_2(t,x) \equiv w_2(t,x) W_j(t,x),$$

то функция $w_1 w_2^{-1}$ *есть первый интеграл этой системы.*

В этом случае зафиксирована ситуация, когда производные Ли в силу системы (PCD) полиномиальных частных интегралов пропорциональны этим полиномиальным частным интегралам:

$$\frac{\mathfrak{P}_j w_1(t,x)}{\mathfrak{P}_j w_2(t,x)} \equiv \frac{w_1(t,x)}{w_2(t,x)}\,,\ j = \overline{1,m}\,.$$

Свойство 7. *Если скалярные функции* w_1 *и* w_2 *являются такими полиномиальными частными интегралами системы* (PCD)*, что выполняются тождества*

$$\mathfrak{P}_j w_1(t,x) \equiv w_1(t,x) W_j(t,x) \ \ \text{и} \ \ \mathfrak{P}_j w_2(t,x) \equiv -\, w_2(t,x) W_j(t,x),$$

то функция $w_1 w_2$ *есть первый интеграл этой системы.*

В данном случае зафиксирована ситуация, когда отношение производных Ли в силу системы (PCD) полиномиальных частных интегралов и отношение этих полиномиальных частных интегралов связаны тождествами:

$$\frac{\mathfrak{P}_j w_1(t,x)}{\mathfrak{P}_j w_2(t,x)} \equiv -\,\frac{w_1(t,x)}{w_2(t,x)}\,,\ j = \overline{1,m}\,.$$

Пример 2. Автономная полиномиальная система

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= \bigl(2x_2z^2-(1+z)(2x_2-x_1z)\bigr)(dt_1-dt_2),\\
dx_2 &= \bigl((1+z)(2x_1+x_2z)-2x_1z^2\bigr)(dt_1-dt_2),\\
dx_3 &= \bigl(z+x_3^2+(z-x_3^2)^2\bigr)\,dt_1+\bigl(z+x_3^2-(z-x_3^2)^2\bigr)\,dt_2,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $z=x_1^2+x_2^2,$ такова, что на $\mathbb{R}^5$ в силу её дифференциал полинома

$$w\colon (t,x)\to c+z,$$

где $c=\mathrm{const},$ равен

$$d\,(c+z)_{|(5)}=2(1+z)z^2\,(dt_1-dt_2).$$

Поэтому в соответствии с определением 1 и свойством 4 полиномы

$$w_1\colon (t,x)\to 1+z,\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^5,\quad \text{и}\quad w_2\colon (t,x)\to z,\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^5,$$

а также их произведения

$$w_1^{n_1}w_2^{n_2}\colon (t,x)\to (1+z)^{n_1}z^{n_2},\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^5,$$

где $n_1,\,n_2$ — целые неотрицательные числа, будут автономными 1-цилиндричными полиномиальными частными интегралами системы (5).

При этом автономный 1-цилиндричный полиномиальный частный интеграл w_1 не определяет интегральной гиперповерхности системы (5), а автономный 1-цилиндричный полиномиальный частный интеграл w_2 определяет 3-мерное многообразие $\{x\colon x_1=x_2=0\}$, которое является автономной 1-цилиндричной интегральной гиперповерхностью дифференциальной системы (5).

3. Кратные полиномиальные частные интегралы

Кратность $\varkappa$ полиномиального частного интеграла.

Определение 1. *Полиномиальный частный интеграл* (1.2) *системы* (PCD) *имеет* ***кратность*** $\varkappa=1+\sum\limits_{\xi=1}^{\varepsilon}f_\xi,$ *если существуют полиномы по* x *с голоморфными на области* $\mathcal{T}$ *по* t *коэффициентами* $Q_{h_\xi g_\xi}$ *и* $R_{h_\xi g_\xi j},$ *удовлетворяющие системе тождеств*

$$\mathfrak{P}_j K_{h_\xi g_\xi}(t,x) = R_{h_\xi g_\xi j}(t,x),\ \forall (t,x)\in \mathcal{P}_0,$$

$$\xi=\overline{1,\varepsilon}\,,\ h_\xi\in\mathbb{N},\ g_\xi=\overline{1,f_\xi}\,,\ j=\overline{1,m}\,,$$

где

$$K_{h_\xi g_\xi}(t,x) = \dfrac{Q_{h_\xi g_\xi}(t,x)}{w^{h_\xi}(t,x)}\,,\ \forall (t,x)\in\mathcal{P}_0,\ \ \mathcal{P}_0\subset\mathcal{P},$$

$w(t,x)\neq 0,\ \forall (t,x)\in\mathcal{P}_0,$ *причём каждый полином* $Q_{h_\xi g_\xi}$ *взаимно прост с* $w,$ *а полиномы* $R_{h_\xi g_\xi j}$ *такие, что*

$$\max\left\{\deg_x R_{h_\xi g_\xi j}\colon \xi=\overline{1,\varepsilon}, h_\xi\in\mathbb{N}, g_\xi=\overline{1,f_\xi}\right\}\leqslant p_j-1, j=\overline{1,m}.$$

Пример 1 (продолжение примера 2.2). Дифференциал

$$d\,\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}\Big|_{(5.2)} = -2(1+x_1^2+x_2^2)(dt_1-dt_2),\ \forall (t,x)\in\mathcal{P}_0,$$

где область $\mathcal{P}_0$ из множества $\{(t,x)\colon x_1^2+x_2^2\neq 0\}$.

Поэтому автономный 1-цилиндричный полиномиальный частный интеграл

$$w_2\colon (t,x)\to x_1^2+x_2^2,\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^5,$$

системы (5.2) будет двукратным.

4. Условные частные интегралы

Условный частный интеграл.

Определение 1. *Скалярную функцию*

$$\omega\colon (t,x)\to \exp v(t,x),\ \forall (t,x)\in\mathcal{P},\ \ \mathcal{P}=\mathcal{T}\times\mathbb{R}^n,\ \mathcal{T}\subset\mathbb{R}^m,$$

где

$$v\colon (t,x)\to v(t,x),\ \forall (t,x)\in\mathcal{P},$$

есть полином по x *с голоморфными на области* $\mathcal{T}$ *по* t *коэффициентами, назовём* ***условным частным интегралом*** *системы* (PCD)*, если*

$$\mathfrak{P}_j v(t,x) = S_j(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathcal{P},\ j = \overline{1,m}\,,$$

где S_j *— полиномы по* x *с голоморфными на области* $\mathcal{T}$ *по* t *коэффициентами такие, что* $\deg_x S_j(t,x) \leqslant p_j - 1,\ j = \overline{1,m}\,.$

Пример 1 (продолжение примера 1.2). Поскольку дифференциал

$$d\,\frac{x_1}{t_1}\Big|_{(4.2)} = x_2(dt_1 + dt_2),\ \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3,$$

то скалярная функция

$$\omega\colon (t,x) \to \exp\frac{x_1}{t_1}\,,\ \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3,$$

является 1-неавтономным 2-цилиндричным условным частным интегралом на любой области $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^3$ системы (4.2).

5. Первые интегралы типа Дарбу

Класс $\mathcal{A}$ *систем* (PCD). (PCD$\mathcal{A}$)*. Критерий принадлежности системы* (PCD) *классу* $\mathcal{A}$*. Критерий существования у системы* (PCD) *класса* $\mathcal{A}$ *интеграла типа Дарбу. Модификация первого интеграла системы* (PCD$\mathcal{A}$)*, построенного на основании её полиномиальных и условных частных интегралов.*

Рассмотрим задачу построения первого интеграла полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах (PCD) по известным полиномиальным частным интегралам с учётом их кратностей и условным частным интегралам.

Пусть среди полиномиальных частных интегралов

$$w_k\colon (t,x) \to w_k(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathcal{P},\ k = \overline{1, s+r}\,, \tag{1}$$

с голоморфными на области $\mathcal{T}$ по t коэффициентами системы (PCD) содержится $s \geqslant 0$ с кратностями $\varkappa_l,\ l = \overline{1,s}\,,$ соответственно. Кроме того, известно $q \geqslant 0$ условных частных интегралов системы (PCD)

$$\omega_\nu\colon (t,x)\to \exp v_\nu(t,x),\ \forall (t,x)\in \mathcal{P},\ \nu=\overline{1,q}\,. \tag{2}$$

Введём в рассмотрение число $\ell = r+q+\sum\limits_{l=1}^{s}\varkappa_l$.

Если для системы (PCD) число $\ell\geqslant 1$, то будем считать, что *система* (PCD) *является системой из класса* $\mathcal{A}$ и писать (PCD) $\in\mathcal{A}$. Для систем (PCD) и (IPCD) из класса $\mathcal{A}$ введём условные обозначения (PCD$\mathcal{A}$) и (IPCD$\mathcal{A}$) соответственно.

В соответствии с определениями 1.2, 1.3 и 1.4 имеем следующий *критерий принадлежности системы* (PCD) *классу* $\mathcal{A}$.

Предложение 1. *Система* (PCD) *принадлежит классу* $\mathcal{A}$, *если и только если при* $\ell\geqslant 1$ *на множестве* $\overset{*}{\mathcal{P}}\subset\mathcal{P}$ *выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{P}_j w_k \equiv w_k W_{kj}\,,\quad \mathfrak{P}_j K_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}} \equiv R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}j}\,,\quad \mathfrak{P}_j v_\nu \equiv S_{\nu j}\,,$$

$$k=\overline{1,s+r}\,,\ h_{\xi_l}\in\mathbb{N},\ g_{\xi_l}=\overline{1,f_{\xi_l}}\,,\ \xi_l=\overline{1,\varepsilon_l}\,, \tag{3}$$

$$l=\overline{1,s}\,,\ \nu=\overline{1,q}\,,\ j=\overline{1,m}\,,$$

где W_{kj} — *полиномы по* x *с голоморфными на области* $\mathcal{T}$ *по* t *коэффициентами,*

$$K_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}(t,x)=\frac{Q_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}(t,x)}{w_l^{h_{\xi_l}}(t,x)},\ \forall (t,x)\in\overset{*}{\mathcal{P}},$$

а полиномы по x *с голоморфными по* t *коэффициентами* $Q_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}$, $R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}j}$ *и* $S_{\nu j}$ *определяются в соответствии с понятиями кратности полиномиального частного интеграла и условного частного интеграла.*

На основании полиномиальных частных интегралов (1) с учётом их кратностей и условных частных интегралов (2) системы (PCD) построим функции

$$X\colon (t,x) \to \prod_{k=1}^{s+r} w_k^{\gamma_k}(t,x),\ \forall (t,x) \in \widetilde{\mathcal{P}},$$

и

$$Y\colon (t,x) \to \sum_{l=1}^{s} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(t,x) + \sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu v_\nu(t,x),$$

$$\forall (t,x) \in \widetilde{\mathcal{P}},$$

где γ_k, $\alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, β_ν — некоторые числа из поля $\mathbb{R}$.

Функция

$$W\colon (t,x) \to X(t,x) \exp\bigl(Z(t) + Y(t,x)\bigr),\ \forall (t,x) \in \widetilde{\mathcal{P}}, \tag{4}$$

где $Z\colon \widetilde{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$ есть некоторая функция, голоморфная по t на области $\widetilde{\mathcal{T}}$, являющейся естественной проекцией области $\widetilde{\mathcal{P}}$ на координатное подпространство Ot, с учётом системы тождеств (3) является первым интегралом на области $\widetilde{\mathcal{P}}$ системы (PCD), если и только если

$$\partial_{t_j} Z(t) + \Xi_j(t,x) = 0,\ \forall (t,x) \in \widetilde{\mathcal{P}},\ j = \overline{1,m}\,, \tag{5}$$

где

$$\Xi_j(t,x) = \sum_{k=1}^{s+r} \gamma_k W_{kj}(t,x) + \sum_{l=1}^{s} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}(t,x) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu S_{\nu j}(t,x),\ \forall (t,x) \in \widetilde{\mathcal{P}},\ j = \overline{1,m}.$$

Тем самым получен критерий наличия у системы (PCD) класса $\mathcal{A}$ первого интеграла (4), который назовём *первым интегралом типа Дарбу*.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (PCD$\mathcal{A}$) *имела первый интеграл* (4) *на подобласти* $\widetilde{\mathcal{P}}$ *области* $\mathcal{P}$, *необходимо и достаточно существования голоморфной на области* $\widetilde{\mathcal{T}}$, *являющейся естественной проекцией области* $\widetilde{\mathcal{P}}$ *на координатное подпространство* Ot, *функции* $Z\colon \widetilde{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$ *и вещественных постоянных* γ_k, $\alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, β_ν *таких, что выполняется система тождеств* (5).

Рассмотрим задачу о модификации первого интеграла

$$\Phi\colon (t,x) \to F\bigl(w_1(t,x),\ldots,w_{s+r}(t,x),K_{1h_1 1}(t,x),\ldots,\\ K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(t,x),v_1(t,x),\ldots,v_q(t,x)\bigr)Z(t),\ \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{P}}, \tag{6}$$

где F и Z — некоторые голоморфные функции, системы (PCD$\mathcal{A}$), построенного на основании полиномиальных частных интегралов (1) с учётом их кратностей и условных частных интегралов (2). При этом априори будем считать, что у системы (PCD) нет первых интегралов вида (6), построенных по меньшему числу функций $w_1,\ldots,w_{s+r}$, $K_{1h_1 1},\ldots,K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}$, $v_1,\ldots,v_q$.

Без нарушения общности рассуждений функцию (6) запишем в следующем виде

$$\widetilde{\Phi}\colon (t,x) \to \widetilde{F}\bigl(\ln w_1(t,x),\ldots,\ln w_{s+r}(t,x),K_{1h_1 1}(t,x),\ldots,\\ K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(t,x),v_1(t,x),\ldots,v_q(t,x)\bigr)\ln Z(t),\ \forall (t,x)\in\overset{*}{\mathcal{P}}, \tag{7}$$

где $\widetilde{F}$ — некоторая голоморфная функция.

С учётом системы тождеств (3) функция (7) является первым интегралом на подобласти $\overset{*}{\mathcal{P}}$ области $\mathcal{P}$ системы (PCD$\mathcal{A}$) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$\sum_{k=1}^{s+r} W_{kj}\,\partial_{\ln w_k}\ln\widetilde{F} + \sum_{l=1}^{s}\sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l}\sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}\,\partial_{K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}}\ln\widetilde{F} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} S_{\nu j}\, \partial_{v_\nu} \ln \widetilde{F} + \partial_{t_j} \ln Z(t) = 0, \ \forall (t,x) \in \overset{*}{\mathcal{P}}, \ j = \overline{1,m}\,. \tag{8}$$

Введём новые переменные

$$\begin{gathered} y_k = \ln w_k, \ k = \overline{1, s+r}\,, \quad y_{s+r+1} = K_{1h_1 1}, \ldots, \\ y_{s+r+\lambda} = K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}, \quad y_{s+r+\lambda+\nu} = v_\nu, \ \nu = \overline{1,q}\,, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\lambda = \sum\limits_{l=1}^{s} \sum\limits_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} f_{\xi_l}$. Тогда в соответствии с системой тождеств (8) дифференциальная система (PCD$\mathcal{A}$) имеет первый интеграл (7) на области $\overset{*}{\mathcal{P}}$, если и только если полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{gathered} dx = P(t,x)\, dt, \quad dy_k = \sum_{j=1}^{m} W_{kj}(t,x)\, dt_j\,, \ k = \overline{1, s+r}\,, \\ dy_{s+r+1} = \sum_{j=1}^{m} R_{1h_1 1j}(t,x)\, dt_j\,, \ldots, \\ dy_{s+r+\lambda} = \sum_{j=1}^{m} R_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s} j}(t,x)\, dt_j\,, \\ dy_{s+r+\lambda+\nu} = \sum_{j=1}^{m} S_{\nu j}(t,x)\, dt_j\,, \ \nu = \overline{1,q}\,, \end{gathered} \tag{10}$$

имеет на области $\mathcal{V}$ из пространства $\mathbb{R}^{m+n+\rho}$ n-цилиндричный первый интеграл

$$\widetilde{\Psi}\colon (t,x,y) \to \widetilde{F}(y) \ln Z(t), \ \forall (t,x,y) \in \mathcal{V},$$

где $y = (y_1, \ldots, y_\rho)$, $\rho = s + r + \lambda + q$.

При этом тождества (8) для дифференциальной системы (10) на области $\mathcal{V}$ будут иметь вид

$$\sum_{k=1}^{s+r} W_{kj}(t,x)\partial_{y_k} \ln \widetilde{F}(y) + R_{1h_1 1j}(t,x)\partial_{y_{s+r+1}} \ln \widetilde{F}(y) + \ldots +$$

$$+ R_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s} j}(t,x)\partial_{y_{s+r+\lambda}} \ln \widetilde{F}(y) + \tag{11}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} S_{\nu j}(t,x)\partial_{y_{s+r+\lambda+\nu}} \ln \widetilde{F}(y) + \partial_{t_j} \ln Z(t) = 0,\ j = \overline{1,m}\,,$$

где область $\mathcal{V} = \overset{*}{\mathcal{P}} \times \mathcal{Y}$, область $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{\rho}$ и является образом области $\overset{*}{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ при отображении (9).

Система тождеств (11) выполняется, если и только если

$$\partial_{y_k} \widetilde{F}(y) = \gamma_k a(y),\ k = \overline{1, s+r}\,,\ \partial_{y_{s+r+\tau}} \widetilde{F}(y) = \alpha_\tau a(y),\ \tau = \overline{1,\lambda}\,,$$

$$\partial_{y_{s+r+\lambda+\nu}} \widetilde{F}(y) = \beta_\nu a(y),\ \nu = \overline{1,q}\,,\ \forall y \in \mathcal{Y},$$

где γ_k, α_τ, β_ν — постоянные, голоморфная на области $\mathcal{Y}$ функция a является тождественной постоянной, когда $Z(t) \not\equiv \mathrm{const}$ на области $\overset{*}{\mathcal{T}}$.

Следовательно, система тождеств (8) имеет место, если и только если на области $\overset{*}{\mathcal{P}}$ выполняется система тождеств

$$\partial_{\ln w_k} \ln \widetilde{F} \equiv \gamma_k a,\quad \partial_{K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}} \ln \widetilde{F} \equiv \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} a,\quad \partial_{v_\nu} \ln \widetilde{F} \equiv \beta_\nu a, \tag{12}$$

$$k = \overline{1,s+r}\,,\ h_{\xi_l} \in \mathbb{N},\ g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}\,,\ \xi_l = \overline{1,\varepsilon_l}\,,\ l = \overline{1,s}\,,\ \nu = \overline{1,q}\,,$$

где числа $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} \in \mathbb{R}$, $\beta_\nu \in \mathbb{R}$, а голоморфная на области $\mathcal{Y}$ функция a является тождественной постоянной, когда $Z(t) \not\equiv \mathrm{const}$ на области $\overset{*}{\mathcal{T}}$.

Таким образом, выполняются условия теоремы 1, а значит, имеет место следующая закономерность

Теорема 2. *Если система* (PCD$\mathcal{A}$) *имеет первый интеграл* (6) *на области* $\widetilde{\mathcal{P}}$, *то его можно представить в виде* (4).

Пример 1 (продолжение примеров 1.2 и 1.4). На основании 1-неавтономного полиномиального частного интеграла

$$w\colon (t,x) \to\, -1+\frac{x_1^2}{t_1^2}+x_2^2+x_3^2,\ \forall (t,x)\in \mathcal{T}\times\mathbb{R}^3,$$

и 1-неавтономного 2-цилиндричного условного частного интеграла

$$\omega\colon (t,x)\to \exp\frac{x_1}{t_1}\,,\ \forall (t,x)\in \mathcal{T}\times\mathbb{R}^3,$$

системы (4.2) строим её 1-неавтономный первый интеграл

$$F\colon (t,x)\to \Big(1-\frac{x_1^2}{t_1^2}-x_2^2-x_3^2\Big)\exp\Big(-2\,\frac{x_1}{t_1}\Big),\ \forall (t,x)\in \mathcal{T}\times\mathbb{R}^3.$$

6. Последние множители типа Дарбу

Критерий существования у системы (PCD$\mathcal{A}$) *последнего множителя типа Дарбу. Модификация последнего множителя системы* (PCD$\mathcal{A}$), *построенного на основании её полиномиальных и условных частных интегралов.*

С учётом системы тождеств (3.5) голоморфная на подобласти $\widetilde{\mathcal{P}}$ области $\mathcal{P}$ функция

$$\mu\colon (t,x)\to X(t,x)\exp\big(Z(t)+Y(t,x)\big),\ \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{P}}, \qquad (1)$$

будет последним множителем на области $\widetilde{\mathcal{P}}$ системы (PCD$\mathcal{A}$), если и только если выполняется система тождеств

$$\partial_{t_j} Z(t)+\Xi_j(t,x)=\,-\operatorname{div}\mathfrak{P}_j(t,x),\ \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{P}},\ j=\overline{1,m}\,. \qquad (2)$$

Поэтому имеет место следующий критерий наличия у системы (PCD$\mathcal{A}$) последнего множителя (1), который будем называть *последним множителем типа Дарбу*.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (PCD$\mathcal{A}$) *имела голоморфный на подобласти* $\widetilde{\mathcal{P}}$ *области* $\mathcal{P}$ *последний множитель* (1), *необходимо и достаточно существования голоморфной на области* $\widetilde{\mathcal{T}}$, *являющейся естественной проекцией области* $\widetilde{\mathcal{P}}$ *на координатное подпространство* Ot, *функции* $Z\colon \widetilde{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$ *и таких вещественных постоянных* γ_k, $\alpha_{lh_\xi g_\xi}$, β_ν, *что выполняется система тождеств* (2).

Задача о модификации голоморфного на подобласти $\widetilde{\mathcal{P}}$ области $\mathcal{P}$ последнего множителя

$$\begin{gathered}\mu\colon (t,x) \to F\bigl(w_1(t,x),\ldots,w_{s+r}(t,x),K_{1h_1 1}(t,x),\ldots,\\ K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(t,x),v_1(t,x),\ldots,v_q(t,x)\bigr)Z(t),\ \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{P}},\end{gathered} \tag{3}$$

системы (PCD$\mathcal{A}$) такого, что система (PCD$\mathcal{A}$) не имеет последнего множителя вида (3) и первых интегралов вида (6.5), построенных на основании меньшего числа функций w_k, $k=\overline{1,s+r}$, $K_{1h_1 1},\ldots,K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}$, v_ν, $\nu=\overline{1,q}$, решается подобно такой же задаче для первого интеграла вида (6.5).

При этом тождества, соответствующие тождествам (8.5), отличаются лишь тем, что в правой части будет $-\operatorname{div}\mathfrak{P}_j(t,x)$, а не нуль.

Выполняются эти тождества, если и только если имеют место тождества (12.5), где голоморфная на области $\overset{*}{\mathcal{Y}}$ функция a является тождественной постоянной, когда

$$\partial_{t_j} Z(t) \not\equiv -\operatorname{div}\mathfrak{P}_j(t,x),\ \forall (t,x)\in\overset{*}{\mathcal{P}},\ j=\overline{1,m}\,.$$

И в соответствии с теоремой 1 приходим к следующему заключению.

Теорема 2. *Если система* (PCD$\mathcal{A}$) *имеет последний множитель* (3), *то его можно представить в виде* (1).

§3. Частные интегралы автономных полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах

Из всего множества полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах (PCD) выделим автономные

$$dx = P(x)\,dt, \tag{APCD}$$

когда элементы $P_{ij}\colon x \to P_{ij}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, матрицы $P(x) = \big\|P_{ij}(x)\big\|_{n\times m}$ суть полиномы по $x_1,\ldots,x_n$ степеней $\max\limits_{i=\overline{1,n}}\big\{\deg P_{ij}(x)\big\} = p_j$, $j = \overline{1,m}$, с вещественными коэффициентами.

Система (APCD) индуцирует как линейные операторы

$$\mathfrak{p}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(x)\partial_{x_i}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

так и линейные операторы

$$\mathfrak{P}_j(t_j, x) = \partial_{t_j} + \mathfrak{p}_j(x), \ \forall (t_j, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Действия операторов (2), как и операторов (1), будем называть *производными Ли в силу системы* (APCD), а сами операторы (1) назовём *автономными* операторами дифференцирования в силу системы (APCD).

1. Частные интегралы

Автономный полиномиальный частный интеграл. Комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл. Критерий существования комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла. Комплексно сопряжённый автономный полиномиальный частный интеграл. Вещественный автономный полиномиальный частный интеграл, определяемый комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом. Производные Ли функции аргу-

мента комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла. Произведение автономных полиномиальных частных интегралов. Критерий существования вещественного автономного полиномиального частного интеграла, определяемого комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом. Кратность вещественного и комплекснозначного автономных полиномиальных частных интегралов. Кратность комплексно сопряжённого автономного полиномиального частного интеграла. Автономный условный частный интеграл.

Для системы (APCD), как и для системы (PCD), введём понятие полиномиального частного интеграла (1.2.2) посредством определения 1.2.2 с учётом различий между операторами (1.1.2) и (1.0), на основании которых построены дифференциальные системы (PCD) и (APCD) соответственно. Наряду с полиномиальными частными интегралами (1.2.2) для систем (APCD) будем рассматривать их автономный аналог.

Определение 1. *Полином*

$$w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{1}$$

назовём ***автономным полиномиальным частным интегралом*** *системы* (APCD)*, если производные Ли в силу системы* (APCD) *полинома* w *равны*

$$\mathfrak{p}_j w(x) = w(x) W_j(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,, \tag{2}$$

где $W_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j = \overline{1, m}\,,$ *суть полиномы.*

Пример 1 (продолжение примера 2.2.2). Рассмотренная в примере 2.2.2 автономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах (5.2.2) имеет автономные полиномиальные частные интегралы (1-цилиндричные)

$$w_2\colon x \to x_1^2 + x_2^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

и

$$w_1\colon x \to 1 + x_1^2 + x_2^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Понятие автономного полиномиального частного интеграла расширим посредством

Определение 2. *Полином*

$$\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \tag{4}$$

назовём ***комплекснозначным*** *автономным полиномиальным частным интегралом системы* (APCD), *если производные Ли в силу системы* (APCD) *полинома* (4) *равны*

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{w}(x) = \mathfrak{w}(x)\, \mathfrak{W}_j(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}\,, \tag{5}$$

где $\mathfrak{W}_j$, $j = \overline{1,m}\,$, *— полиномы по* x *из* $\mathbb{R}^n$ *с, вообще говоря, комплексными коэффициентами.*

Система тождеств (5) на $\mathbb{R}^n$ равносильна вещественной системе тождеств при $j = \overline{1,m}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j \operatorname{Re}\mathfrak{w}(x) &= \operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j(x) - \operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j(x),\\ \mathfrak{p}_j \operatorname{Im}\mathfrak{w}(x) &= \operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j(x) + \operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Тем самым устанавливаем следующий критерий существования комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла у системы (APCD).

Лемма 1. *Полином* (4) *является комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом системы* (APCD) *тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств* (6).

С учётом этого критерия докажем следующие закономерности относительно комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах.

Свойство 1. *Если система* (APCD) *имеет комплексозначный автономный полиминальный частный интеграл* (4), *то ему комплексно сопряжённый полином*

$$\overline{\mathfrak{w}}\colon x \to \operatorname{Re}\mathfrak{w}(x) - i\operatorname{Im}\mathfrak{w}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

также является комплексозначным автономным полиномиальным частным интегралом системы (APCD), *причём выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{p}_j \overline{\mathfrak{w}}(x) = \overline{\mathfrak{w}}(x)\, \overline{\mathfrak{W}}_j(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}\,,$$

где полиномы $\overline{\mathfrak{W}}_j,\ j=\overline{1,m}$, *комплексно сопряжены соответственно с полиномами* $\mathfrak{W}_j,\ j=\overline{1,m}$, *из тождеств* (5).

Действительно, с учётом леммы 1 на $\mathbb{R}^n$ имеем, что

$$\mathfrak{p}_j\overline{\mathfrak{w}}=\mathfrak{p}_j(\operatorname{Re}\mathfrak{w}-i\operatorname{Im}\mathfrak{w})=\mathfrak{p}_j\operatorname{Re}\mathfrak{w}-i\,\mathfrak{p}_j\operatorname{Im}\mathfrak{w}=$$

$$=\operatorname{Re}\mathfrak{w}\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j-\operatorname{Im}\mathfrak{w}\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j-i\big(\operatorname{Re}\mathfrak{w}\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j+\operatorname{Im}\mathfrak{w}\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j\big)=$$

$$=(\operatorname{Re}\mathfrak{w}-i\operatorname{Im}\mathfrak{w})\big(\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j-i\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j\big)=\overline{\mathfrak{w}}\ \overline{\mathfrak{W}}_j,\ j=\overline{1,m}.\ \blacksquare$$

Свойство 2. *Если система* (APCD) *имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл* (4), *то вещественный полином*

$$p\colon x\to\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}(x)+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n, \tag{7}$$

будет автономным полиномиальным частным интегралом системы (APCD) *и на* $\mathbb{R}^n$ *выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{p}_j\big(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}\big)\equiv 2\big(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}\big)\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j,\ j=\overline{1,m}, \tag{8}$$

где полиномы $\mathfrak{W}_j,\ j=\overline{1,m}$, *находятся из тождеств* (5).

Действительно, с учётом леммы 1 на $\mathbb{R}^n$ имеем:

$$\mathfrak{p}_j\big(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}\big)=2\operatorname{Re}\mathfrak{w}\ \mathfrak{p}_j\operatorname{Re}\mathfrak{w}+2\operatorname{Im}\mathfrak{w}\ \mathfrak{p}_j\operatorname{Im}\mathfrak{w}=$$

$$=2\operatorname{Re}\mathfrak{w}\big(\operatorname{Re}\mathfrak{w}\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j-\operatorname{Im}\mathfrak{w}\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j\big)+2\operatorname{Im}\mathfrak{w}\big(\operatorname{Re}\mathfrak{w}\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j+$$

$$+\operatorname{Im}\mathfrak{w}\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j\big)=2\big(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}\big)\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j,\ j=\overline{1,m}.\ \blacksquare$$

Свойство 3. *Пусть система* (APCD) *имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл* (4). *Тогда производные Ли в силу системы* (APCD) *экспоненциальной функции*

$$\psi\colon x\to\exp\varphi(x),\ \forall x\in\mathcal{X},$$

где

$$\varphi\colon x\to\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)},\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{9}$$

равны

$$\mathfrak{p}_j \exp\varphi(x) = \exp\varphi(x)\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{W}_j(x),\ \forall x\in\mathcal{X},\ j=\overline{1,m}\,, \qquad (10)$$

где полиномы $\mathfrak{W}_j,\ j=\overline{1,m}\,,$ *находятся из тождеств* (5), *область* $\mathcal{X}$ *из пространства* $\mathbb{R}^n$ *такова, что её дополнение до* $\mathbb{R}^n$ *содержит множество всех нулей полинома* $\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}$.

Действительно, с учётом леммы 1 имеем:

$$\mathfrak{p}_j \exp\varphi(x) = \exp\varphi(x)\ \mathfrak{p}_j\varphi(x) = \exp\varphi(x)\ \mathfrak{p}_j\ \mathrm{arctg}\ \frac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}(x)}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}(x)} =$$

$$= \frac{\exp\varphi(x)}{1+\dfrac{\mathrm{Im}^2\,\mathfrak{w}(x)}{\mathrm{Re}^2\,\mathfrak{w}(x)}}\cdot\frac{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}(x)\ \mathfrak{p}_j\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}(x)-\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}(x)\ \mathfrak{p}_j\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}(x)}{\mathrm{Re}^2\,\mathfrak{w}(x)} =$$

$$= \frac{\exp\varphi(x)}{\mathrm{Re}^2\,\mathfrak{w}(x)+\mathrm{Im}^2\,\mathfrak{w}(x)}\Big(\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}(x)\,\Big(\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}(x)\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{W}_j(x)+$$

$$+\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}(x)\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{W}_j(x)\Big)-\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}(x)\Big(\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}(x)\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{W}_j(x)-$$

$$-\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}(x)\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{W}_j(x)\Big)\Big) = \exp\varphi(x)\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{W}_j(x),\forall x\in\mathcal{X}, j=\overline{1,m}.\ \blacksquare$$

Функция (9) является функцией аргумента комплекснозначного полинома (4). Относительно этой функции из тождеств (10) получаем

$$\mathfrak{p}_j\varphi(x) = \mathrm{Im}\,\mathfrak{W}_j(x),\ \forall x\in\mathcal{X},\ j=\overline{1,m}\,. \qquad (11)$$

Тем самым получена формула вычисления производных Ли в силу системы (APCD) функции аргумента комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла (4).

Основываясь на определениях 1 и 2 методом, аналогичным методу доказательства свойства 4.2.2, доказываем

Свойство 4. *Произведение* u_1u_2 *полиномов* $u_1\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ *и* $u_2\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$, *где* $\mathbb{K}$ *— поле вещественных* $\mathbb{R}$ *или комплексных* $\mathbb{C}$ *чисел, является автономным полиномиальным частным интегралом* (*вещественным или комплексным*) *системы*

(APCD) *тогда и только тогда, когда его сомножители* u_1 *и* u_2 *являются автономными полиномиальными частными интегралами системы* (APCD).

Из этого свойства и свойства 1 следует

Свойство 5. *Вещественный полином* (7) *является автономным полиномиальным частным интегралом системы* (APCD), *если и только если система* (APCD) *имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл* (4) (*или комплексно сопряжённый ему*).

Пример 2 (продолжение примеров 2.2.2 и 1). Рассмотренная в примере 2.2.2 система (5.2.2) имеет вещественный автономный полиномиальный частный интеграл

$$w_2 \colon x \to x_1^2 + x_2^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Так как

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + i\, x_2)(x_1 - i\, x_2), \ \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

то в соответствии со свойством 5 система (5.2.2) имеет комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1 \colon x \to x_1 + i\, x_2, \ \ \mathfrak{w}_2 \colon x \to x_1 - i\, x_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Используя частный интеграл (3) системы (5.2.2), по свойству 4 заключаем, что полиномы

$$u \colon x \to w_1^{n_1}(x)\, \mathfrak{w}_1^{m_1}(x)\, \mathfrak{w}_2^{m_2}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

при любых целых неотрицательных n_1, m_1, m_2 будут автономными полиномиальными частными интегралами (вещественными или комплекснозначными) системы (5.2.2).

Заметим, что вещественный автономный полиномиальный частный интеграл (3) не определяет интегрального многообразия $\{x \colon w_1(x) = 0\}$ на фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$. А каждый из комплекснозначных автономных полиномиальных частных интегралов $\mathfrak{w}_1$ и $\mathfrak{w}_2$ определяет интегральное многообразие на фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде прямой $\{x \colon x_1 = x_2 = 0\}$.

Следуя определению 1.3.2, где введено понятие кратности полиномиального частного интеграла системы (PCD), для системы (APCD) введём понятие кратности автономных полиномиальных частных интегралов (вещественных и комплекснозначных).

Определение 3. *Пусть автономный полиномиальный частный интеграл* (1) *системы* (APCD) *такой, что суще-*

ствуют полиномы $Q_{h_\xi g_\xi}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $R_{h_\xi g_\xi j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющие системе тождеств*

$$\mathfrak{p}_j K_{h_\xi g_\xi}(x) = R_{h_\xi g_\xi j}(x),\ \forall x \in \mathcal{X},$$
$$\xi = \overline{1,\varepsilon}\,,\ h_\xi \in \mathbb{N},\ g_\xi = \overline{1,f_\xi}\,,\ \ j = \overline{1,m}\,, \tag{12}$$

где

$$K_{h_\xi g_\xi}(x) = \frac{Q_{h_\xi g_\xi}(x)}{w^{h_\xi}(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X},\ \xi = \overline{1,\varepsilon}\,,\ h_\xi \in \mathbb{N},\ g_\xi = \overline{1,f_\xi}\,,$$

множество $\mathcal{X}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *таково, что* $w(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathcal{X}$, *причём*:

1) *каждый полином* $Q_{h_\xi g_\xi}$, $\xi = \overline{1,\varepsilon}$, $h_\xi \in \mathbb{N}$, $g_\xi = \overline{1,f_\xi}$, *взаимно прост с частным интегралом* (1);

2) *у полиномов* $R_{h_\xi g_\xi j}$, $j = \overline{1,m}$, *степени таковы, что*

$$\max\Bigl\{\deg R_{h_\xi g_\xi j}(x)\colon \xi = \overline{1,\varepsilon}\,,\ h_\xi \in \mathbb{N},\ g_\xi = \overline{1,f_\xi}\Bigr\} \leqslant p_j - 1.$$

Тогда число $\varkappa = 1 + \sum\limits_{\xi=1}^{\varepsilon} f_\xi$ *назовём* ***кратностью*** *автономного полиномиального частного интеграла* (1).

В примере 1.3.2 построен двукратный автономный полиномиальный частный интеграл системы (5.2.2).

Пример 3. Автономная полиномиальная система

$$dx_1 = x_1(1+x_1+x_2)\,dt_1 + 2x_1(1+x_1+x_2)\,dt_2,$$
$$dx_2 = (2x_2+x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\,dt_1 + (4x_2+x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2)\,dt_2 \tag{13}$$

имеет автономный полиномиальный частный интеграл

$$w\colon x \to x_1,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \tag{14}$$

для которого в тождествах (2) функции

$$W_1\colon x \to 1 + x_1 + x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \ \text{ и } \ W_2\colon x \to 2(1 + x_1 + x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Дифференциал в силу системы (13)

$$d\,\frac{x_2(2+2x_1+x_2)}{x_1^2}\Big|_{(13)} =$$

$$= \frac{1}{x_1^4}\Big(x_1^2\, d(2x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2)\big|_{(13)} - (2x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2)\, dx_1^2\big|_{(13)}\Big) =$$

$$= \,-\,\frac{2}{x_1^3}\big(x_2(2 + x_1 + x_2)\, dx_1 - x_1(1 + x_1 + x_2)\, dx_2\big)\big|_{(13)} =$$

$$= \,-\,\frac{2(1 + x_1 + x_2)}{x_1^2}\big(x_2(2 + x_1 + x_2)(dt_1 + 2dt_2) -$$

$$- (2x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\, dt_1 - (4x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)\, dt_2\big) =$$

$$= 2(1 + x_1 + x_2)(dt_1 + dt_2),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},\ \mathcal{X} = \{x\colon x_1 \neq 0\}.$$

Поэтому выполняется система тождеств (12) при

$$\varepsilon = \xi = 1,\ h_1 = 2,\ g_1 = f_1 = 1,$$

$$Q_{21}(x) = x_2(2 + 2x_1 + x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$R_{211}(x) = R_{212}(x) = 2(1 + x_1 + x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

причём полином Q_{21} взаимно прост с автономным полиномиальным частным интегралом (14), а у полиномов R_{211} и R_{212} степени равны 1 и равны $p_1 - 1 = p_2 - 1 = 1$.

В соответствием с определением 3 автономный полиномиальный частный интеграл (14) системы (13) имеет кратность $\varkappa = 1 + f_1 = 2$.

Вместе с тем не существует полинома Q_{11}, взаимно простого с (14), такого, что выполняется система тождеств (12) при $h_1 = 1$, то есть, на $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$ дифференциал в силу системы (13)

$$d\,\frac{Q_{11}(x)}{x_1}\Big|_{(13)} = (\alpha_1 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2)\, dt_1 + (\alpha_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 x_2)\, dt_2.$$

Действительно, поскольку на $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$

$$d\,\dfrac{Q_{11}(x)}{x_1}\Big|_{(13)} = \dfrac{1}{x_1^2}\,\bigl(x_1\,dQ_{11}(x) - Q_{11}(x)\,dx_1\bigr)\big|_{(13)} =$$

$$= \dfrac{1}{x_1^2}\,\bigl(\bigl(x_1\partial_{x_1}Q_{11}(x) - Q_{11}(x)\bigr)\,dx_1 + x_1\partial_{x_2}Q_{11}(x)\,dx_2\bigr)\big|_{(13)} =$$

$$= \dfrac{1}{x_1}\,\bigl((1+x_1+x_2)\bigl(x_1\partial_{x_1}Q_{11}(x) - Q_{11}(x)\bigr) + (2x_2 + x_1^2 + x_1x_2 +$$

$$+ x_2^2)\partial_{x_2}Q_{11}(x)\bigr)\,dt_1 + \dfrac{1}{x_1}\,\bigl(2(1+x_1+x_2)\bigl(x_1\partial_{x_1}Q_{11}(x) - Q_{11}(x)\bigr) +$$

$$+ (4x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)\partial_{x_2}Q_{11}(x)\bigr)\,dt_2,$$

то по необходимости должно выполняться тождество

$$x_1(1+x_1+x_2)\partial_{x_1}Q_{11}(x) + (2x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\partial_{x_2}Q_{11}(x) =$$
$$= (1+x_1+x_2)Q_{11}(x) + x_1(\alpha_1 + \beta_1x_1 + \gamma_1x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Для полинома

$$Q_{11}(x) = \sum_{i+j=1}^{N} a_{ij}\,x_1^i x_2^j,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

это тождество имеет место лишь при $a_{0j} = 0,\ j = \overline{0, N}$.

Значит, полином Q_{11} не будет взаимно прост с полиномом (14).

Ситуация, отражённая в примере 3, говорит о том, что при установлении кратности $\varkappa$ автономного полиномиального частного интеграла (1) в тождествах (12) натуральные числа h_ξ не обязательно должны выбираться последовательно из натурального ряда и начинаться с единицы.

Аналогично кратности вещественного введём понятие кратности комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла.

Определение 4. *Пусть комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл* (4) *системы* (APCD) *такой, что существуют комплекснозначные полиномы* $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, *удовлетворяющие систе-*

ме тождеств

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x), \ \forall x \in \mathfrak{X}, \qquad \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}\,, \ \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \ \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta}\,, \ j = \overline{1, m}\,, \tag{15}$$

где функция

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) = \frac{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x)}{\mathfrak{w}^{\mathfrak{h}_\zeta}(x)}\,, \ \forall x \in \mathfrak{X}, \ \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}\,, \ \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \ \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta}\,,$$

множество $\mathfrak{X}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *таково, что* $\mathfrak{w}(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathfrak{X},$ *причём*:

1) *каждый полином* $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}, \ \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}\,, \ \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \ \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta}\,,$ *взаимно прост с комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом* (4);

2) *у полиномов* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}\,, \ j = \overline{1, m}\,,$ *степени таковы, что*

$$\max\left\{\deg \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x) \colon \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}\,, \ \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \ \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta}\right\} \leqslant p_j - 1.$$

Тогда число $\mathfrak{z} = 1 + \sum\limits_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{f}_\zeta$ *назовём* ***кратностью*** *комплекснозначного частного интеграла* (4).

Система тождеств (15) равносильна системе

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) = \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x), \ \ \mathfrak{p}_j \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) = \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x), \qquad \forall x \in \mathfrak{X}, \ \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}\,, \ \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \ \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta}\,, \ j = \overline{1, m}\,. \tag{16}$$

На основании свойства 1, определения 4 и равносильности систем тождеств (15) и (16) получаем

Свойство 6. *Пусть система* (APCD) *имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл* (4) *кратности* $\mathfrak{z}$. *Тогда ему комплексно сопряжённый автономный полиномиальный частный интеграл системы*

(APCD) *также имеет кратность* $\mathfrak{z}$.

Пример 4. Автономная полиномиальная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2(2x_1 + x_1^2 - x_2^2)\,dt_1 + x_1(4x_2 + x_1^2 - x_2^2)\,dt_2, \\ dx_2 &= (-x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2^2)\,dt_1 + 2(-x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2)\,dt_2 \end{aligned} \tag{17}$$

имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}\colon x \to x_1 + i\,x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$ с функциями

$$\mathfrak{W}_1\colon x \to x_2(1+x_1) - i(x_1 - x_2^2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

и

$$\mathfrak{W}_2\colon x \to 2x_2 + x_1^2 - i\,x_1(2 - x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

в тождествах (5).

Пусть

$$\mathfrak{Q}_{11}\colon x \to x_1 - i(1 - x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда на $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ производные Ли в силу системы (17)

$$\mathfrak{p}_j\,\frac{\mathfrak{Q}_1(x)}{\mathfrak{w}(x)} = \mathfrak{p}_j\Big(1 - \frac{i}{x_1 + i\,x_2}\Big) = \frac{i}{(x_1 + i\,x_2)^2}\,\mathfrak{p}_j(x_1 + i\,x_2) =$$

$$= \frac{i}{(x_1 + i\,x_2)^2}\,\mathfrak{w}(x)\,\mathfrak{W}_j(x) = \frac{i}{x_1 + i\,x_2}\,\mathfrak{W}_j(x),\ j = 1,2,$$

соответственно равны

$$\mathfrak{R}_{111}(x) = 1 + i\,x_2,\ \forall x \in \mathcal{X},\ \ \mathfrak{R}_{112}(x) = 2 + i\,x_1,\ \forall x \in \mathcal{X}. \tag{18}$$

По определению 4, комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}$ является двукратным.

Пример 5. Автономная полиномиальная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2(-x_1^2 + x_2^2)\,dt_1 + x_1(2x_2 + x_1^2 - x_2^2)\,dt_2, \\ dx_2 &= -2x_1x_2^2\,dt_1 + (-x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2x_2)\,dt_2 \end{aligned} \tag{19}$$

имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}\colon x \to x_1 + i\,x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$ с функциями

$$\mathfrak{W}_1\colon x \to -x_2(x_1 + i\,x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathfrak{W}_2\colon x \to x_2 + x_1^2 - i\,x_1(1 - x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть

$$\mathfrak{Q}_{11}\colon x \to 1 + x_1 + i\,x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда на $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ производные Ли в силу системы (19)

$$\mathfrak{p}_j\,\frac{\mathfrak{Q}_{11}(x)}{\mathfrak{w}(x)} = \mathfrak{p}_j\Big(1 + \frac{1}{x_1 + ix_2}\Big) = -\,\frac{1}{(x_1 + i\,x_2)^2}\,\mathfrak{p}_j(x_1 + i\,x_2) =$$

$$= -\,\frac{1}{(x_1 + i\,x_2)^2}\,\mathfrak{w}(x)\,\mathfrak{W}_j(x) = -\,\frac{1}{x_1 + i\,x_2}\,\mathfrak{W}_j(x),\ \ j = 1, 2,$$

соответственно равны

$$\mathfrak{R}_{111}(x) = x_2,\ \forall x \in \mathfrak{X},\ \ \mathfrak{R}_{112}(x) = -\,x_1 + i,\ \forall x \in \mathfrak{X}. \tag{20}$$

По определению 4, комплекснозначный полином $\mathfrak{w}$ является двукратным.

Для систем (APCD) введём автономный аналог условного частного интеграла (определение 1.4.2).

Определение 5. *Функцию*

$$\omega\colon x \to \exp v(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— полином, назовём* ***автономным условным частным интегралом*** *системы* (APCD)*, если производные Ли в силу системы* (APCD) *равны*

$$\mathfrak{p}_j v(x) = S_j(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,, \tag{21}$$

где полиномы S_j *степеней* $\deg S_j(x) \leqslant p_j - 1,\ j = \overline{1, m}\,.$

Автономный условный частный интеграл характеризуется прежде всего тем, что он не определяет интегрального многообразия $\{x\colon \omega(x) = 0\}$ системы (APCD) на фазовом пространстве, а также тем, что он построен на полиномиальной основе и определён на всём фазовом пространстве.

Пример 6. Автономная полиномиальная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= (1 + x_1 + x_2^2)\,dt_1 + (2 + x_2 + x_1x_2 + x_2^2)\,dt_2,\\ dx_2 &= (x_1 + x_2^2)\,dt_1 + x_2(1 + x_1 + x_2)\,dt_2 \end{aligned} \tag{22}$$

имеет автономный условный частный интеграл

$$\omega\colon x \to \exp(x_1 - x_2),\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \tag{23}$$

для которого в тождествах (21) функции

$$S_1\colon x \to 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{и} \quad S_2\colon x \to 2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{24}$$

2. Автономные системы типа Дарбу

Класс $\mathfrak{A}$ *систем* (APCD). *Критерий принадлежности системы* (APCD) *классу* $\mathfrak{A}$. *Критерий существования у системы* (APCD) *класса* $\mathfrak{A}$ *первого интеграла типа Дарбу. Критерий существования у системы* (APCD) *класса* $\mathfrak{A}$ *последнего множителя типа Дарбу. Модификация первого интеграла системы* (APCD$\mathfrak{A}$)*, построенного на основании её автономных полиномиальных и условных частных интегралов. Модификация последнего множителя системы* (APCD$\mathfrak{A}$)*, построенного на основании её автономных полиномиальных и условных частных интегралов.*

Пусть система (APCD) имеет $s + r$ вещественных автономных полиномиальных частных интегралов

$$w_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ k = \overline{1, s + r}\,, \tag{1}$$

среди которых содержится $s \geqslant 0$ соответственно с кратностями $\varkappa_l,\ l = \overline{1, s}$, и $\mathfrak{s} + \mathfrak{r}$ комплекснозначных автономных полиномиальных частных интегралов

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ \mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s} + \mathfrak{r}}\,, \tag{2}$$

среди которых содержится $\mathfrak{s} \geqslant 0$ соответственно с кратностями $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}},\ \mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}$. Кроме того, известно $q \geqslant 0$ автономных условных частных интегралов

$$\omega_\nu\colon x \to \exp v_\nu(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nu = \overline{1, q}\,, \tag{3}$$

где $v_\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \nu = \overline{1, q}$, — полиномы.

Составим число

$$\ell = r + \mathfrak{r} + \sum_{l=1}^{s} \varkappa_l + \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}} + q.$$

Если для системы (APCD) число $\ell \geqslant 1$, то будем считать, что система (APCD) является системой класса $\mathfrak{A}$ и *обозначать* её (APCD$\mathfrak{A}$).

В соответствии с определениями 1.1 − 5.1 и свойствами 2.1 и 3.1 получаем следующий *критерий принадлежности системы* (APCD) *классу* $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Система* (APCD) *принадлежит классу* $\mathfrak{A}$, *если и только если выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{p}_j w_k(x) = w_k(x) W_{kj}(x), \ \ \mathfrak{p}_j K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) = R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}(x),$$

$$\mathfrak{p}_j \big(\mathrm{Re}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x) + \mathrm{Im}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)\big) = 2\big(\mathrm{Re}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x) + \mathrm{Im}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)\big) \mathrm{Re}\, \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x),$$

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{Im}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)}{\mathrm{Re}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)} = \mathrm{Im}\, \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x), \ \mathfrak{p}_j \mathrm{Re}\, \mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}(x) = \mathrm{Re}\, \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}} j}(x), \tag{4}$$

$$\mathfrak{p}_j \mathrm{Im}\, \mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}(x) = \mathrm{Im}\, \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}} j}(x), \ \ \mathfrak{p}_j v_\nu(x) = S_{\nu j}(x), \ \forall x \in \mathcal{X},$$

$$j = \overline{1, m}\,, \ k = \overline{1, s+r}\,, \ l = \overline{1, s}\,, \ \xi_l = \overline{1, \varepsilon_l}\,, \ h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \ g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}\,,$$

$$\mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s} + \mathfrak{r}}\,, \ \mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}\,, \ \zeta_\mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{e}_\mathfrak{l}}\,, \ \mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \in \mathbb{N}, \ \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}} = \overline{1, \mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}}\,, \ \nu = \overline{1, q}\,,$$

где $W_{kj} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *суть полиномы*; *функции*

$$K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) = \frac{Q_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x)}{w_l^{h_{\xi_l}}(x)}\,, \ \ \mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}(x) = \frac{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}(x)}{\mathfrak{w}_\mathfrak{l}^{\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}}(x)}\,, \ \forall x \in \mathcal{X};$$

а полиномы

$$R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}} j} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},$$

$$S_{\nu j} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ Q_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \textit{и} \quad \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

определяются в соответствии с понятиями кратности автономного полиномиального частного интеграла и автономного условного частного интеграла, когда

$$\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} f_{\xi_l}, \quad \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}} = 1 + \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}.$$

На основании автономных полиномиальных частных интегралов (1) и (2) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов (3) системы (APCD$\mathfrak{A}$) построим функции

$$X\colon x \to \prod_{k=1}^{s+r} w_k^{\gamma_k}(x) \prod_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \bigl(\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)\bigr)^{\eta_{\mathfrak{k}}}, \ \forall x \in \mathcal{X}',$$

и

$$Y\colon x \to \sum_{l=1}^{s} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) + \sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu v_\nu(x) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \tau_{\mathfrak{k}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)} + \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x), \ \forall x \in \mathcal{X}', \ \mathcal{X}' \subset \mathcal{X},$$

где $\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \beta_\nu, \tau_{\mathfrak{k}}, \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}, \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}$ — числа из поля $\mathbb{R}$.

Функция

$$W\colon (t,x) \to X(x) \exp\bigl(It + Y(x)\bigr), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}', \tag{5}$$

где $I = (I_1, \ldots, I_m)$, $I_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, с учётом системы тождеств (4) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD$\mathfrak{A}$), если и только если

$$I_j + \Xi_j(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1, m}\,, \tag{6}$$

где

$$\Xi_j \colon x \to \sum_{k=1}^{s+r} \gamma_k W_{kj}(x) + \sum_{l=1}^{s} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}(x) +$$

$$+ 2\sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \eta_{\mathfrak{k}} \operatorname{Re} \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x) + \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} j}(x) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu S_{\nu j}(x) + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \tau_{\mathfrak{k}} \operatorname{Im} \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} j}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Тем самым доказана

Теорема 2. *Для того чтобы система* (APCD$\mathfrak{A}$) *имела первый интеграл* (5), *необходимо и достаточно существования постоянных* γ_k, $\eta_{\mathfrak{k}}$, $\tau_{\mathfrak{k}}$, $\alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, $\varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}$, $\psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}$, β_ν, I_j *таких, что выполняется система тождеств* (6).

С учётом системы тождеств (4) на основании определения последнего множителя заключаем, что функция

$$\mu \colon (t, x) \to X(x) \exp\bigl(It + Y(x)\bigr), \ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}', \tag{7}$$

будет последним множителем на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD$\mathfrak{A}$), если и только если

$$I_j + \Xi_j(x) = -\operatorname{div}\mathfrak{p}_j(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ j=\overline{1,m}\,, \tag{8}$$

и можем утверждать

Теорема 3. *Для того чтобы система* (APCD$\mathfrak{A}$) *имела последний множитель* (7), *необходимо и достаточно существования постоянных* γ_k, $\eta_{\mathfrak{k}}$, $\tau_{\mathfrak{k}}$, $\alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}$, $\varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, $\psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}$, β_ν, I_j *таких, что выполняется система тождеств* (8).

Виды первого интеграла и последнего множителя системы (APCD) класса $\mathfrak{A}$ определяются в соответствии с такими закономерностями.

Теорема 4. *Если система* (APCD$\mathfrak{A}$) *имеет первый интеграл*

$$\Phi\colon (t,x)\to F\Big(w_1(x),\ldots,w_{s+r}(x),K_{1h_1 1}(x),\ldots,K_{sh_{\varepsilon_s}f_{\varepsilon_s}}(x),$$

$$\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_1(x)+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_1(x),\ldots,\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x),$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)},\ldots,\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}\,, \tag{9}$$

$$\operatorname{Re}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}(x),\ldots,\operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x),\operatorname{Im}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}(x),\ldots,\operatorname{Im}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x),$$

$$v_1(x),\ldots,v_q(x)\Big)Z(t),\ \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{P}},$$

где F *и* Z *— некоторые голоморфные функции, построенный на основании автономных полиномиальных частных интегралов* (1) *и* (2) *с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов* (3)[6], *то его можно представить в виде* (5).

[6]Априори считая, что система (APCD$\mathfrak{A}$) не имеет первых интегралов вида (9), построенных на основании меньшего числа функций w_k, $k=\overline{1,s+r}$, $K_{1h_1 1},\ldots,K_{sh_{\varepsilon_s}f_{\varepsilon_s}}$, $\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}+\operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}}$, $\mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{k}}$, $\operatorname{Re}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1},\ldots,\operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}$, $\operatorname{Im}\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1},\ldots,\operatorname{Im}\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}$, v_ν, $\nu=\overline{1,q}$.

Доказательство построено на тех же принципах, что и доказательство теоремы 2.5.2.

Задача о модификации последнего множителя

$$\mu\colon (t,x)\to F\Big(w_1(x),\ldots,w_{s+r}(x), K_{1h_1 1}(x),\ldots,K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(x),$$

$$\mathrm{Re}^2\,\mathfrak{w}_1(x)+\mathrm{Im}^2\,\mathfrak{w}_1(x),\ \ldots,\ \mathrm{Re}^2\,\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)+\mathrm{Im}^2\,\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x),$$

$$\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}_1(x)}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}_1(x)},\ \ldots,\ \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}(x)}\,, \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}(x),\ \ldots,\ \mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x),\ \mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1}(x),\ \ldots,\ \mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}}(x),$$

$$v_1(x),\ldots,v_q(x)\Big)Z(t),\ \forall (t,x)\in\mathcal{P},$$

системы (APCD$\mathfrak{A}$) такого, что система (APCD$\mathfrak{A}$) не имеет первых интегралов вида (9) и последнего множителя вида (10), которые построены на основании меньшего числа функций w_k, $k=\overline{1,s+r}\,,$ $K_{1h_1 1},\ldots,K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}},$ $\mathrm{Re}^2\,\mathfrak{w}_\mathfrak{k}{+}\mathrm{Im}^2\,\mathfrak{w}_\mathfrak{k},$ $\mathrm{arctg}\,\dfrac{\mathrm{Im}\,\mathfrak{w}_\mathfrak{k}}{\mathrm{Re}\,\mathfrak{w}_\mathfrak{k}}\,,$ $\mathfrak{k}=\overline{1,\mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,$ $\mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1},\ldots,\mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}},$ $\mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{1\mathfrak{h}_1 1},\ldots,\mathrm{Im}\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{e}_\mathfrak{s}}},$ $v_\nu,\ \nu=\overline{1,q}\,,$ решается подобным образом.

И справедлива

Теорема 5. *Если система* (APCD$\mathfrak{A}$) *имеет последний множитель* (10), *где* F *и* Z *— некоторые голоморфные функции, построенный на основании автономных полиномиальных частных интегралов* (1) *и* (2) *с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов* (3), *то его можно представить в виде* (7).

Теоремы 4 и 5 позволяют отнести системы (APCD) класса $\mathfrak{A}$ к дифференциальным системам типа Дарбу.

3. Построение первых интегралов и последних множителей

3.1. Системы (APCD) класса $\mathfrak{A}$

Достаточные условия построения неавтономного первого интеграла или последнего множителя. Достаточные условия построения автономного первого интеграла или последнего множителя.

При наличии некоторого числа автономных полиномиальных частных интегралов (1.2) и (2.2) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов (3.2) на их основании можно построить первый интеграл и последний множитель полиномиальной системы (APCD$\mathfrak{A}$). Это число прежде всего зависит от чисел $n, m, p_1, \ldots, p_m,$ по которым строим числа

$$\mathfrak{c} = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{c}_j, \ \ \mathfrak{c}_j = \binom{n + p_j - 1}{n}, \ j = \overline{1, m}\,.$$

Теорема 1. *Система* (APCD$\mathfrak{A}$) *при* $\ell = \mathfrak{c} - m$ *имеет либо первый интеграл* (5.2) *на области* $\mathbb{R}^m \times \mathfrak{X}'$, *либо последний множитель* (7.2).

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.2 функция (5.2) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathfrak{X}'$ системы (APCD$\mathfrak{A}$) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (6.2).

А в соответствии с теоремой 3.2 функция (7.2) будет последним множителем системы (APCD$\mathfrak{A}$) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (8.2).

Система тождеств (8.2) при $\ell = \mathfrak{c} - m$ распадается на систему, которая состоит из $\mathfrak{c}$ линейных, вообще говоря, неоднородных, уравнений с $\mathfrak{c}$ неизвестными $\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \tau_{\mathfrak{k}}, \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}},$ $\varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}, \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}, \beta_\nu, I_j$; а система тождеств (6.2) при $\ell = \mathfrak{c} - m$ распадается на однородную систему $\mathfrak{c}$ линейных уравнений с теми же $\mathfrak{c}$ неизвестными.

Определители этих систем совпадают. Обозначим его Δ.

Пусть $\Delta \neq 0$. Тогда система, соответствующая тождеству (8.2), имеет единственное решение, и функция (7.2), составленная на его основании, является последним множителем системы (APCD$\mathfrak{A}$).

Если $\Delta = 0,$ то система, соответствующая тождеству (6.2), имеет нетривиальное решение; и функция (5.2), составленная на его основании, будет первым интегралом на $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD$\mathfrak{A}$). ■

В процессе доказательства теоремы 1, по сути дела, были доказаны следующие два утверждения.

Следствие 1. *Система* (APCD$\mathfrak{A}$) *при* $\ell = \mathfrak{c} - m,$ *когда определитель* $\Delta = 0,$ *имеет первый интеграл* (5.2).

Следствие 2. *Система* (APCD$\mathfrak{A}$) *при* $\ell = \mathfrak{c} - m,$ *когда определитель* $\Delta \neq 0,$ *имеет последний множитель* (7.2).

На случай автономного первого интеграла и автономного последнего множителя системы (APCD$\mathfrak{A}$) аналогично теореме 1 доказываем следующую

Теорема 2. *Система* (APCD$\mathfrak{A}$) *при* $\ell = \mathfrak{c}$ *имеет либо автономный первый интеграл*

$$F\colon x \to X(x) \exp Y(x), \ \forall x \in \mathcal{X}', \tag{1}$$

на области $\mathcal{X}',$ *либо автономный последний множитель*

$$\mu\colon x \to X(x) \exp Y(x), \ \forall x \in \mathcal{X}', \ \mathcal{X}' \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Если через Λ обозначить определитель Δ на случай автономного первого интеграла (1) и автономного последнего множителя (2), то аналогами следствий 1 и 2 будут

Следствие 3. *Система* (APCD$\mathfrak{A}$) *при* $\ell = \mathfrak{c},$ *когда определитель* $\Lambda = 0,$ *имеет автономный первый интеграл* (1).

Следствие 4. *Система* (APCD$\mathfrak{A}$) *при* $\ell = \mathfrak{c},$ *когда определитель* $\Lambda \neq 0,$ *имеет автономный последний множитель* (2).

На основании теорем 1 и 2 с учётом свойства Якоби последних множителей получаем и такие закономерности.

Следствие 5. *Система* (APCD$\mathfrak{A}$) *при* $\ell = \mathfrak{c} - m + 1$ *имеет первый интеграл* (5.2) *на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}',$ *который при* $\Lambda = 0$ *будет автономным* (1) *на области* $\mathcal{X}'.$

Следствие 6. *Система* (APCD$\mathfrak{A}$) *при* $\ell = \mathfrak{c} + 1$ *имеет автономный первый интеграл* (1) *на области* $\mathcal{X}'.$

3.2. Системы (IAPCD) класса $\mathfrak{A}$

Достаточные условия построения первого интеграла. Достаточные условия построения первого интеграла или последнего множителя.

Если система (APCD$\mathfrak{A}$) является вполне разрешимой, то условия, достаточные для построения первого интеграла и последнего множителя, в подавляющем числе случаев могут быть ослаблены.

Система (APCD) индуцирует m автономных обыкновенных дифференциальных систем n-го порядка

$$dx = P^j(x)\, dt_j\,, \tag{APDj}$$

где вектор-полином $P^j(x) = \big(P_{1j}(x), \ldots, P_{nj}(x)\big)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, является j-м столбцом $(n \times m)$-матрицы P, $j = \overline{1, m}$.

Вполне очевидны, если основываться на соответствующих определениях, такие закономерности относительно интегральных связей системы (APCD) и систем (APDj), $j = \overline{1, m}$.

Предложение 1. *Если система* (APCD) *имеет:*

а) автономный первый интеграл F на области $\mathcal{X}'$ из пространства $\mathbb{R}^n$;

б) автономный полиномиальный частный интеграл $w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с кратностью $\varkappa$;

в) автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ с кратностью $\mathfrak{z}$;

г) автномный условный частный интеграл ω,

то и каждая автономная обыкновенная дифференциальная система (APDj)*, $j = \overline{1, m}$, имеет:*

а) автономный первый интеграл F на области $\mathcal{X}'$;

б) автономный полиномиальный частный интеграл $w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с кратностью $\varkappa$;

в) автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ с кратностью $\mathfrak{z}$;

г) автономный условный частный интеграл ω.

Для системы (IAPCD) имеют место следующие возможности построения первого интеграла по её автономным частным интегралам (1.2) – (3.2).

Теорема 3. *Пусть у системы* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *число* $\ell = \mathfrak{c}_k$, $k \in \{1, \dots, m\}$, *а система* (APDk) *не имеет автономных первых интегралов*

$$\Xi_j \colon x \to \Xi_j(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq k, \tag{3}$$

на пространстве $\mathbb{R}^n$. *Тогда функция* (5.2) *является первым интегралом на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ *системы* (IAPCD$\mathfrak{A}$).

Доказательство. Если $\ell = \mathfrak{c}_k$, то на основании следствия 5 при $m = 1$ устанавливаем, что функция

$$F_k \colon (t_k, x) \to X(x) \exp\bigl(I_k t_k + Y(x)\bigr),\ \forall (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}', \tag{4}$$

является первым интегралом системы (APDk) и

$$\mathfrak{P}_k(t_k, x)\bigl(X(x) \exp\bigl(I_k t_k + Y(x)\bigr)\bigr) = 0,\ \forall (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}'. \tag{5}$$

На области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ действия операторов

$$\begin{gathered} \mathfrak{P}_j(t_j, x)\bigl(X(x) \exp\bigl(I_k t_k + Y(x)\bigr)\bigr) = \\ = X(x) \exp\bigl(I_k t_k + Y(x)\bigr)\Xi_j(x),\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq k. \end{gathered} \tag{6}$$

Основываясь на полной разрешимости системы (IAPCD$\mathfrak{A}$), непосредственным вычислением действий оператора $\mathfrak{P}_k$, $k \neq j$, на обе части каждого из тождеств (6) с учётом условий Фробениуса и тождества (5), получаем, что

$$\mathfrak{p}_k \Xi_j(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq k. \tag{7}$$

Однако система (APDk) не имеет первых интегралов (3), поэтому из тождеств (7) следует, что

$$\Xi_j(x) = \, - I_j,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq k. \tag{8}$$

Стало быть, при (8) имеет место система тождеств

$$\mathfrak{P}_j(t_j, x)\{X(x) \exp\bigl(It + Y(x)\bigr)\bigr) = 0,\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}',\ j = \overline{1,m}\,,$$

которая означает, что функция (5.2) является первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (IAPCD$\mathfrak{A}$). ■

Теорема 4. *Пусть у системы* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *число* $\ell = \mathfrak{c}_k - 1,$ $k \in \{1, \ldots, m\},$ *а система* (APDk) *не имеет на пространстве* $\mathbb{R}^n$ *автономных первых интегралов* (3) *и*

$$\Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x) = C_j,\ j = \overline{1, m},\ j \neq k, \tag{9}$$

где C_j *— произвольные вещественные постоянные. Тогда система* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *имеет либо первый интеграл* (5.2) *на области* $\mathbb{R}^m \times \mathfrak{X}',$ *либо последний множитель* (7.2).

Доказательство. Предварительно заметим, что в соответствии с формулой (21.2.1.0) на $\mathbb{R}^n$ имеет место импликация

$$\big[\mathfrak{p}_j(x), \mathfrak{p}_k(x)\big] = 0 \implies \mathfrak{p}_j \operatorname{div} \mathfrak{p}_k(x) = \mathfrak{p}_k \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x). \tag{10}$$

Пусть автономная обыкновенная дифференциальная система (APDk) такова, что $\ell = \mathfrak{c}_k - 1.$ В силу теоремы 1 при $m = 1$ задача по построению первого интеграла (4) и последнего множителя

$$\mu\colon (t_k, x) \to X(x) \exp\big(I_k t_k + Y(x)\big),\ \forall (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}', \tag{11}$$

системы (APDk) сводится к разрешению систем линейных уравнений, построенных на основании тождеств (5) и

$$\begin{gathered}\mathfrak{P}_k(t_k, x)\big(X(x) \exp\big(I_k t_k + Y(x)\big)\big) = \\ = -\big(X(x) \exp\big(I_k t_k + Y(x)\big)\big) \operatorname{div} \mathfrak{p}_k(x),\ \forall (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}',\end{gathered} \tag{12}$$

соответственно. При этом определители этих систем будут одинаковыми порядка $\mathfrak{c}_k.$ Обозначим его $\Delta_k.$

Пусть определитель $\Delta_k \neq 0.$ Тогда в соответствии со следствием 2 при $m = 1$ система (APDk) имеет последний множитель (11), а значит, выполняется система тождеств (12).

Предположим, что система (APDk) не имеет первых интегралов (9).

Основываясь на полной разрешимости системы (IAPCD$\mathfrak{A}$), непосредственным вычислением действий оператора $\mathfrak{P}_k,\ k \neq j,$ на обе части каждого из тождеств (6) с учётом условий Фробениуса, условия (12) и импликации (10) получаем, что

$$\mathfrak{p}_k\big(\Xi_j(x)+\operatorname{div}\mathfrak{p}_j(x)\big)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ j=\overline{1,m}\,,\ j\neq k.$$

Отсюда следуют тождества

$$\Xi_j(x)+\operatorname{div}\mathfrak{p}_j(x)=\,-\,I_j,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ j=\overline{1,m}\,,\ j\neq k,\ I_j=\text{const},$$

ибо система (APDk) не имеет первых интегралов (9).

Поэтому на области $\mathbb{R}^m\times\mathcal{X}'$ выполняется система тождеств

$$\mathfrak{P}_j(t,x)\big(X(x)\exp\big(I_kt_k+Y(x)\big)\big)=$$

$$=\,-\,\big(I_j+\operatorname{div}\mathfrak{p}_j(x)\big)X(x)\exp\big(I_kt_k+Y(x)\big),\ j=\overline{1,m}\,,\ j\neq k,$$

и функция (7.2) есть последний множитель системы (IAPCD$\mathfrak{A}$).

При $\Delta_k=0$ подобным образом доказываем, что функция (5.2) является первым интегралом на $\mathbb{R}^m\times\mathcal{X}'$ системы (IAPCD$\mathfrak{A}$). ■

Следствие 7. *Если выполняются условия теоремы* 4 *и определитель* $\Delta_k\neq 0$, *то функция* (7.2) *является последним множителем системы* (IAPCD$\mathfrak{A}$).

Следствие 8. *Если выполняются условия теоремы* 4 *и определитель* $\Delta_k=0$, *то функция* (5.2) *является первым интегралом на области* $\mathbb{R}^m\times\mathcal{X}'$ *системы* (IAPCD$\mathfrak{A}$).

Пример 1. Вполне разрешимая система

$$\begin{aligned}dx_1&=2x_1x_2\,dt_1+(\,-\,x_1^2+x_2^2)\,dt_2,\\ dx_2&=(\,-\,x_1^2+x_2^2)\,dt_1-2x_1x_2\,dt_2\end{aligned}\tag{13}$$

имеет комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1\colon x\to x_1+ix_2,\ \ \mathfrak{w}_2\colon x\to x_1-ix_2,\ \forall x\in\mathbb{R}^2,$$

с функциями

$$\mathfrak{W}_{11}\colon x\to x_2-ix_1,\ \ \mathfrak{W}_{12}\colon x\to\,-\,x_1-ix_2,\ \forall x\in\mathbb{R}^2,$$

и

$$\mathfrak{W}_{21}\colon x\to x_2+ix_1,\ \ \mathfrak{W}_{22}\colon x\to\,-\,x_1+ix_2,\ \forall x\in\mathbb{R}^2.$$

Число $\ell=2$.

Для обыкновенной дифференциальной системы (APD1)

$$\frac{dx_1}{dt_1} = 2x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt_1} = -x_1^2 + x_2^2$$

число $\mathfrak{c}_1 = \binom{2+2-1}{2} = 3$, а значит, $\ell = \mathfrak{c}_1 - 1$.

Эта система не имеет первым интегралом функцию

$$F\colon x \to -2\eta_1 x_1 + \alpha_1 x_2 - 4x_1, \ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

составленную по семейству (9), определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

В соответствии со следствием 7 рациональная функция

$$\mu\colon x \to \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\},$$

является последним множителем системы (13).

3.3. Специальные случаи

Построение неавтономного первого интеграла по одному автономным полиномиальному или условному частным интегралам. Построение автономных первых интегралов по двум автономным полиномиальным частным интегралам.

На основании автономных полиномиальных частных интегралов (вещественных и комплекснозначных) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов строятся первые интегралы системы (APCD$\mathfrak{A}$) в следующих случаях.

Теорема 5. *Пусть у системы* (APCD$\mathfrak{A}$):

1) *для автономного полиномиального частного интеграла* $w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *в тождествах*

$$\mathfrak{p}_j w(x) = w(x) W_j(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m},$$

полиномы W_j, $j = \overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными*;

2) *для комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла* $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *в тождествах*

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{w}(x) = \mathfrak{w}(x)\mathfrak{W}_j(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{14}$$

полиномы $\operatorname{Re}\mathfrak{W}_j$, $j = \overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными*;

3) *для комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла* $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *в тождествах* (14) *полиномы* $\operatorname{Im}\mathfrak{W}_j$, $j = \overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными*;

4) *для автономного полиномиального частного интеграла* $w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *кратности* $\varkappa$ *в тождествах*

$$\mathfrak{p}_j K_{h_\xi g_\xi}(x) = R_{h_\xi g_\xi j}(x),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

$$j = \overline{1,m}\,,\ \xi = \overline{1,\varepsilon}\,,\ h_\xi \in \mathbb{N},\ g_\xi = \overline{1,f_\xi}\,,$$

при фиксированных h_ξ *и* g_ξ *полиномы* $R_{h_\xi g_\xi j}$, $j = \overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными*;

5) *для комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла* $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *с кратностью* $\mathfrak{z}$ *в тождествах*

$$\begin{gathered}\mathfrak{p}_j \mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x),\ \forall x \in \mathcal{X},\\ j = \overline{1,m}\,,\ \zeta = \overline{1,\mathfrak{e}}\,,\ \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N},\ \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1,\mathfrak{f}_\zeta}\,,\end{gathered} \tag{15}$$

при фиксированных $\mathfrak{h}_\zeta$ *и* $\mathfrak{g}_\zeta$ *полиномы* $\operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}$, $j = \overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными*;

6) *для комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла* $\mathfrak{w}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *с кратностью* $\mathfrak{z}$ *в тождествах* (15) *при фиксированных* $\mathfrak{h}_\zeta$ *и* $\mathfrak{g}_\zeta$ *полиномы* $\operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}$, $j = \overline{1,m}$, *есть тождественные постоянные*;

7) *для условного частного интеграла* $\omega\colon x \to \exp v(x)$ *в тождествах*

$$\mathfrak{p}_j v(x) = S_j(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,,$$

полиномы $S_j, j=\overline{1,m}$, *являются тождественными постоянными. Тогда существует постоянный вектор* $I=(I_1,\ldots,I_m)$, $I_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,m}\,,$ *такой, что функция*:

1) $F\colon (t,x) \to w(x)\exp It,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{m+n}$;

2) $F\colon (t,x) \to \big(\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(x)\big)\exp It,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{m+n}$;

3) $F\colon (t,x) \to \operatorname{arctg}\,\dfrac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}(x)} + It,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{m} \times \mathcal{X}'$;

4) $F\colon (t,x) \to K_{h_\xi g_\xi}(x) + It,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{m} \times \mathcal{X}'$;

5) $F\colon (t,x) \to \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) + It,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{m} \times \mathcal{X}'$;

6) $F\colon (t,x) \to \operatorname{Im}\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) + It,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{m} \times \mathcal{X}'$;

7) $F\colon (t,x) \to v(x) + It,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{m} \times \mathcal{X}',\ \mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$,

будет первым интегралом системы (APCD$\mathcal{A}$) *соответственно.*

Доказательство является непосредственным следствием определений 1.1, 3.1, 4.1, 5.1.

Пример 2 (продолжение примера 1.1.1.1). Автономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах (3.1.1.1) имеет такой 1-цилиндричный автономный полиномиальный частный интеграл

$$w\colon x \to x_1,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

что

$$dx_1\big|_{(3.1.1.1)} = x_1(dt_1 + 3dt_2),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4.$$

Поэтому в соответствии с утверждением 1) теоремы 5 система (3.1.1.1) имеет на пространстве $\mathbb{R}^4$ первый интеграл (4.1.1.1), который образует базис первых интегралов системы (3.1.1.1) ввиду её не полной разрешимости (см. § 3, Гл. I).

Пример 3. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_1 - x_2^3)\, dt_1 + x_1(2 + x_2^2)\, dt_2, \\ dx_2 &= x_2(1 + x_1x_2)\, dt_1 + x_2(2 - x_1^2)\, dt_2 \end{aligned} \tag{16}$$

имеет комплекснозначный автономный частный интеграл

$$\mathfrak{w}\colon x \to x_1 + i\, x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \tag{17}$$

такой, что полный дифференциал в силу системы (16) на $\mathbb{R}^4$

$$d(x_1 + ix_2)_{|(16)} = (x_1 + ix_2)\big((1 + ix_2^2)\, dt_1 + (2 - ix_1x_2)\, dt_2\big).$$

Поэтому в соответствии с утверждением 2) теоремы 5 система (16) имеет первый интеграл

$$F\colon (t, x) \to (x_1^2 + x_2^2)\exp\big(-2(t_1 + 2t_2)\big),\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4.$$

Если учесть, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = x_2(2x_1 + 4x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3)(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}),\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

и, следовательно, для системы (16) не выполняются условия Фробениуса, то в соответствии с теоремой 1.0.3.1 построенный первый интеграл образует базис первых интегралов на пространстве $\mathbb{R}^4$ системы (16).

Пример 4. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2(x_1 - 1)\, dt_1 + x_2(x_1 - 2)\, dt_2, \\ dx_2 &= (x_1 + x_2^2)\, dt_1 + (2x_1 + x_2^2)\, dt_2 \end{aligned} \tag{18}$$

имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (17) с функциями

$$\mathfrak{W}_1\colon x \to x_2 + i,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{и} \quad \mathfrak{W}_2\colon x \to x_2 + 2i,\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

В соответствии с утверждением 3) теоремы 5 функция

$$F\colon (t, x) \to t_1 + 2t_2 - \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\,,\ \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

является первым интегралом системы (18) на любой области $\mathcal{D}$ из множества $\mathbb{R}^4 \backslash \{(t, x)\colon x_1 = 0\}$. Для системы (18) не выполняются условия Фробениуса (скобки Пуассона

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = -x_1^2\partial_{x_1} - x_1x_2\partial_{x_2}, \ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

и не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$).

Поэтому построенный первый интеграл составляет базис первых интегралов на любой области $\mathcal{D}$ из $\mathbb{R}^4 \backslash \{(t,x)\colon x_1 = 0\}$ системы (18) (по теореме 1.0.3.1).

Пример 5. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_1 - x_2 + x_1^2)\, dt_1 + (x_1 - 2x_2 + 2x_1^2)\, dt_2, \\ dx_2 &= x_2(1 + x_1)\, dt_1 + x_2(1 + 2x_1)\, dt_2 \end{aligned} \tag{19}$$

имеет 1-цилиндричный автономный полиномиальный частный интеграл

$$w\colon x \to x_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

кратности $\varkappa = 2$ такой, что

$$dx_2\big|_{(19)} = x_2\big((1 + x_1)\, dt_1 + (1 + 2x_1)\, dt_2\big), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

$$d\,\frac{x_1}{x_2}\Big|_{(19)} = -\,(dt_1 + 2dt_2), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}', \ \mathcal{X}' = \{(x_1, x_2)\colon x_2 \neq 0\}.$$

Поэтому в соответствии с утверждением 4) теоремы 5 система (19) имеет первый интеграл

$$F\colon (t,x) \to \frac{x_1}{x_2} + t_1 + 2t_2, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D},$$

который составляет её базис первых интегралов на любой области $\mathcal{D}$, содержащейся в множестве $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}'$ (по теореме 1.0.3.1 ввиду того, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = x_1(4 - 3x_1)\partial_{x_1} + x_1x_2\partial_{x_2}, \ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

не является нуль-оператором на $\mathbb{R}^2$).

Пример 6 (продолжение примера 4.1). У системы уравнений в полных дифференциалах (17.1) комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (17) кратности $\mathfrak{z} = 2$ такой, что имеют место представления (18.1).

Поэтому в соответствии с утверждением 5) теоремы 5 система (17.1) имеет первый интеграл

$$F\colon (t,x) \to \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} + t_1 + 2t_2,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},$$

который образует её базис первых интегралов на любой области $\mathcal{D}$ из множества $\mathbb{R}^2 \times \{x\colon x_1^2+x_2^2 \neq 0\}$ (по теореме 1.0.3.1 ввиду того, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = (2x_1^4 - x_1^4x_2 + 2x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 + 2x_2^4 + x_2^5)\partial_{x_1} +$$
$$+ 2x_1x_2(2x_1^2 - x_1^2x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - x_2^3)\partial_{x_2},\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$).

Пример 7 (продолжение примера 5.1). У системы уравнений в полных дифференциалах (19.1) комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (17) кратности $\mathfrak{z} = 2$ такой, что имеют место представления (20.1).

Поэтому в соответствии с утверждением 6) теоремы 5 система (19.1) имеет 1-неавтономный первый интеграл

$$F\colon (t,x) \to \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} + t_2,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},$$

который образует её базис первых интегралов на любой области $\mathcal{D}$ из множества $\mathbb{R}^2 \times \{x\colon x_1^2+x_2^2 \neq 0\}$ (по теореме 1.0.3.1 ввиду того, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = (-x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_1^4x_2 - x_2^4 - x_2^5)\partial_{x_1} +$$
$$+ 2x_1x_2(-x_1^2 + x_1^2x_2 + x_2^2 + x_2^3)\partial_{x_2},\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$).

Пример 8 (продолжение примера 6.1). Система уравнений в полных дифференциалах (22.1) имеет автономный условный частный интеграл (23.1) при (24.1).

Поэтому в соответствии с утверждением 7) теоремы 5 система (22.1) имеет первый интеграл на пространстве $\mathbb{R}^4$

$$F\colon (t,x) \to x_1 - x_2 - t_1 - 2t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4,$$

который образует её базис первых интегралов на пространстве $\mathbb{R}^4$ (по теореме 1.0.3.1 ввиду того, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] =$$

$$= (-2 + x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - x_1x_2^2 + x_2^3)(\partial_{x_2} + \partial_{x_2}), \ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

не является нуль-оператором на плоскости $\mathbb{R}^2$).

На автономный случай аналогом свойства 6.2.2 является

Свойство 1. *Если автономные полиномиальные частные интегралы* $w_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $w_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *системы* (ÅPCD) *таковы, что производные Ли в силу системы* (ÅPCD) *от них связаны соотношениями*

$$\frac{\mathfrak{p}_j w_1(x)}{\mathfrak{p}_j w_2(x)} = \frac{w_1(x)}{w_2(x)}\,, \ \forall x \in \mathcal{X}_2, \ j = \overline{1,m}\,,$$

то функция

$$F \colon x \to \frac{w_1(x)}{w_2(x)}\,, \ \forall x \in \mathcal{X}_2,$$

является автономным первым интегралом на области $\mathcal{X}_2$ *системы* (ÅPCD).

Для комплекснозначных автономных полиномиальных частных интегралов имеют место следующие закономерности.

Свойство 2. *Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы* $\mathfrak{w}_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{w}_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *системы* (ÅPCD) *таковы, что в тождествах*

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{w}_1(x) = \mathfrak{w}_1(x)\mathfrak{W}_{1j}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}\,, \qquad (20)$$

и

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{w}_2(x) = \mathfrak{w}_2(x)\mathfrak{W}_{2j}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}\,, \qquad (21)$$

полиномы

$$\mathfrak{W}_{1j}(x) = \mathfrak{W}_{2j}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}\,. \qquad (22)$$

Тогда функции

$$F_1 \colon x \to \frac{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_2(x)} \qquad (23)$$

и

$$F_2\colon x \to \frac{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x) - \operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_2(x)} \qquad (24)$$

являются автономными первыми интегралами на области $\mathcal{X}_2,\ \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^n,$ *системы* (APCD).

Доказательство. Как и при доказательстве свойства 6.2.2 устанавливаем, что для полиномов $\mathfrak{w}_1$ и $\mathfrak{w}_2$ (со свойством (22) в тождествах (20) и (21)) имеют место тождества

$$\mathfrak{p}_j\,\frac{\mathfrak{w}_1(x)}{\mathfrak{w}_2(x)} = 0,\ \forall x \in \mathcal{X}_2,\ j = \overline{1,m}\,,$$

или

$$\mathfrak{p}_j\,\operatorname{Re}\frac{\mathfrak{w}_1(x)}{\mathfrak{w}_2(x)} = 0,\quad \mathfrak{p}_j\,\operatorname{Im}\frac{\mathfrak{w}_1(x)}{\mathfrak{w}_2(x)} = 0,\ \forall x \in \mathcal{X}_2,\ j = \overline{1,m}\,.$$

Поэтому функции (23) и (24) являются автономными первыми интегралами на области $\mathcal{X}_2$ системы (APCD). ■

Свойство 3. *Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы* $\mathfrak{w}_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{w}_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *системы* (APCD) *таковы, что в тождествах* (20) *и* (21) *полиномы* $\mathfrak{W}_{1j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{W}_{2j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ j = \overline{1,m}\,,$ *связаны соотношениями*

$$\operatorname{Re}\mathfrak{W}_{1j}(x) = \operatorname{Re}\mathfrak{W}_{2j}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,. \qquad (25)$$

Тогда функция

$$F\colon x \to \frac{\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_2(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}_2, \qquad (26)$$

является автономным первым интегралом на области $\mathcal{X}_2$ *из* $\mathbb{R}^n$, *системы* (APCD).

Доказательство. В соответствии со свойством 2.1 полиномы

$$p_\theta\colon x \to \operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_\theta(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_\theta(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \theta = 1, 2,$$

являются автономными полиномиальными частными интегралами системы (APCD), для которых выполняются тождества (8.1) при

$p = p_\theta$, $\theta = 1, 2$. Если учесть соотношения (25), то получим, что

$$\frac{\mathfrak{p}_j p_1(x)}{\mathfrak{p}_j p_2(x)} = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}_2,\ j = \overline{1, m}\,.$$

Отсюда по свойству 1 заключаем, что функция (26) является автономным первым интегралом на области $\mathcal{X}_2$. ■

Свойство 4. *Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы* $\mathfrak{w}_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{w}_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *системы* (APCD) *таковы, что в тождествах* (20) *и* (21) *полиномы* $\mathfrak{W}_{1j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{W}_{2j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $j = \overline{1, m}$, *связаны соотношениями*

$$\operatorname{Im}\mathfrak{W}_{1j}(x) = \operatorname{Im}\mathfrak{W}_{2j}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,. \tag{27}$$

Тогда функция

$$F\colon x \to \frac{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x) - \operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{28}$$

является автономным первым интегралом на области $\mathcal{X}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *системы* (APCD).

Доказательство. В соответствии со свойством 3.1 и следующими из него тождествами (11.1) для функций аргумента полиномов $\mathfrak{w}_1$ и $\mathfrak{w}_2$ на области $\mathcal{X}$ имеем, что

$$p_j\big(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\big) = \operatorname{Im}\mathfrak{W}_{1j}(x) - \operatorname{Im}\mathfrak{W}_{2j}(x) = 0,\ j = \overline{1, m}\,.$$

Поэтому функция

$$F\colon x \to \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

является автономным первым интегралом на области $\mathcal{X}$ системы (APCD). Используя тригонометрические преобразования, эту функцию приводим к виду (28). ■

Заметим, что первые интегралы (23) и (24) при выполнении условий свойства 2 могут быть получены посредством первых интегралов (26) и (28) из свойств 3 и 4.

На автономный случай аналогом свойства 7.2.2 является

Свойство 5. *Если автономные полиномиальные частные интегралы* $w_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $w_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *системы* (APCD) *таковы, что*

$$\frac{\mathfrak{p}_j w_1(x)}{\mathfrak{p}_j w_2(x)} = -\,\frac{w_1(x)}{w_2(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}_2,\ \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,,$$

то функция

$$F\colon x \to w_1(x)w_2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

является автономным первым интегралом на пространстве $\mathbb{R}^n$ *системы* (APCD).

Для комплекснозначных автономных полиномиальных частных интегралов имеют место следующие закономерности.

Свойство 6. *Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы* $\mathfrak{w}_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{w}_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *системы* (APCD) *таковы, что в тождествах* (20) *и* (21) *полиномы*

$$\mathfrak{W}_{1j}(x) = -\,\mathfrak{W}_{2j}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,.$$

Тогда функция

$$\Gamma_1\colon x \to \operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x) - \operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

а также функция

$$\Gamma_2\colon x \to \operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

являются автономными первыми интегралами на пространстве $\mathbb{R}^n$ *системы* (APCD).

Доказательство. Как и при доказательстве свойства 7.2.2, устанавливаем, что

$$\mathfrak{p}_j\big(\mathfrak{w}_1(x)\,\mathfrak{w}_2(x)\big) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,,$$

или что

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Re}\big(\mathfrak{w}_1(x)\,\mathfrak{w}_2(x)\big) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,,$$

и

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Im}\big(\mathfrak{w}_1(x)\,\mathfrak{w}_2(x)\big) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,.$$

Отсюда следует, что функции Γ_1 и Γ_2 являются автономными первыми интегралами на $\mathbb{R}^n$ системы (APCD). ■

Свойство 7. *Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы* $\mathfrak{w}_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{w}_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *системы* (APCD) *таковы, что в тождествах* (20) *и* (21) *полиномы* $\mathfrak{W}_{1j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{W}_{2j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $j = \overline{1,m}$, *связаны соотношениями*

$$\operatorname{Re}\mathfrak{W}_{1j}(x) = -\operatorname{Re}\mathfrak{W}_{2j}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,.$$

Тогда полином

$$\Gamma\colon x \to \big(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_1(x)\big)\big(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_2(x)\big)$$

является автономным первым интегралом на пространстве $\mathbb{R}^n$ *системы* (APCD).

Доказательство. В соответствии со свойством 2.1 частное производных Ли

$$\frac{\mathfrak{p}_j\big(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_1(x)\big)}{\mathfrak{p}_j\big(\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_2(x)\big)} =$$

$$= -\,\frac{\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}^2\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2\mathfrak{w}_2(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}_2,\ j = \overline{1,m}\,.$$

По свойству 5 заключаем, что имеет место свойство 7. ■

Свойство 8. *Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы* $\mathfrak{w}_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{w}_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *системы* (APCD) *таковы, что в тождествах* (20) *и* (21) *полиномы* $\mathfrak{W}_{1j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *и* $\mathfrak{W}_{2j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $j = \overline{1,m}$, *связаны соотношениями*

$$\operatorname{Im}\mathfrak{W}_{1j}(x) = -\operatorname{Im}\mathfrak{W}_{2j}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,.$$

Тогда функция

$$F\colon x \to \frac{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x) - \operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x)}\,, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

является автономным первым интегралом на области $\mathcal{X}$ *из пространства* $\mathbb{R}^n$ *системы* (APCD).

Доказательство аналогично доказательству свойства 4 с той лишь разницей, что

$$p_j\bigl(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\bigr) = 0, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ j = \overline{1,m}\,,$$

и, следовательно, автономным первым интегралом на области $\mathcal{X}$ системы (APCD) будет функция

$$F\colon x \to \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_1(x)} + \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re}\mathfrak{w}_2(x)}\,. \blacksquare$$

Свойство 9. *Пусть система* (APCD) *имеет автономный условный частный интеграл* $E\colon x \to \exp v(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$ *а производные Ли функции* $u\colon x \to u(x), \forall x \in \mathcal{X},$ *в силу системы* (APCD) *равны*

$$\mathfrak{p}_j u(x) = -u(x)S_j(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ j = \overline{1,m}\,,$$

где полиномы $S_j, j = \overline{1,m}$, *определяются тождествами* (21.1). *Тогда функция*

$$F\colon x \to u(x)\exp v(x), \ \forall x \in \mathcal{X},$$

является первым интегралом на области $\mathcal{X}$ *системы* (APCD).

Действительно, производные Ли

$$\mathfrak{p}_j F(x) = \exp v(x)\,\mathfrak{p}_j u(x) + u(x)\,\exp v(x)\,\mathfrak{p}_j v(x) =$$

$$= \exp v(x)\bigl(-u(x)S_j(x) + u(x)S_j(x)\bigr) = 0, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ j = \overline{1,m}\,. \blacksquare$$

В частности, справедливо

Свойство 10. *Если система* (APCD) *имеет автономный условный частный интеграл* $E\colon x \to \exp v(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$ *и автономный полиномиальный частный интеграл* $w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

такие, что

$$\mathfrak{p}_j v(x) = S_j(x),\ \ \mathfrak{p}_j w(x) = -w(x) S_j(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m}\,,$$

то функция

$$F\colon x \to w(x) \exp v(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

является первым интегралом на $\mathbb{R}^n$ *системы* (APCD).

Теорема 6. *Пусть обыкновенная дифференциальная система* (APDλ) *имеет неавтономный первый интеграл*

$$F_\lambda \colon (t_\lambda, x) \to w_\lambda(x) \exp\bigl(-t_\lambda\bigr),\ \forall (t_\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \tag{29}$$

и не имеет на $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ *первых интегралов*

$$F_j \colon (t_\lambda, x) \to \mathfrak{P}_j w_\lambda(x) \exp\bigl(-t_\lambda\bigr),\ j = \overline{1,m}\,,\ j \ne \lambda. \tag{30}$$

Тогда система (IAPCD) *имеет неавтономный первый интеграл*

$$F\colon (t,x) \to w_\lambda(x) \exp \sum_{j=1}^{m} a_j t_j,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{X}, \tag{31}$$

где $\mathfrak{X}$ *есть область из фазового пространства* $\mathbb{R}^n$, *а числа* $a_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,m}\,,\ a_\lambda = -1.$

Доказательство. Функция (29) является первым интегралом системы (APDλ), поэтому

$$\mathfrak{P}_\lambda w_\lambda(x) \exp\bigl(-t_\lambda\bigr) = 0,\ \forall (t_\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}. \tag{32}$$

Из того, что $w_\lambda(x) \exp\bigl(-t_\lambda\bigr) = C_\lambda,$ получаем

$$w_\lambda(x) = C_\lambda \exp t_\lambda. \tag{33}$$

В силу полной разрешимости скобки Пуассона

$$\bigl[\mathfrak{P}_j(t,x), \mathfrak{P}_\lambda(t,x)\bigr] = \mathfrak{O},\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{n+m},\ j = \overline{1,m}\,,$$

и на основании тождества (32) получаем:

$$\mathfrak{P}_\lambda \mathfrak{P}_j w_\lambda(x)\exp\bigl(-t_\lambda\bigr) = \mathfrak{P}_j \mathfrak{P}_\lambda w_\lambda(x)\exp\bigl(-t_\lambda\bigr) = 0,$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{X},\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq \lambda.$$

Так как дифференциальная система (APDλ) не имеет первых интегралов (30), то на $\mathbb{R}^m \times \mathfrak{X}$ получаем

$$\mathfrak{P}_j w_\lambda(x)\exp\bigl(-t_\lambda\bigr) = C_j,\ C_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq \lambda.$$

Откуда, учитывая (33), имеем:

$$\mathfrak{P}_j w_\lambda(x) = C_j \exp t_\lambda = \frac{C_j}{C_\lambda}\, C_\lambda \exp t_\lambda = \frac{C_j}{C_\lambda}\, w_\lambda(x) = -\,a_j w_\lambda(x),$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{X},\quad a_j = -\,\frac{C_j}{C_\lambda}\,,\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq \lambda.$$

Следовательно, на области $\mathbb{R}^m \times \mathfrak{X}$

$$\mathfrak{P}_j w_\lambda(x) = -\,a_j w_\lambda(x),\ a_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq \lambda. \tag{34}$$

Тогда с учётом (34)

$$\mathfrak{P}_j \Bigl(w_\lambda(x)\, \exp \sum_{\zeta=1}^{m} a_\zeta t_\zeta\Bigr) =$$

$$= \mathfrak{P}_j w_\lambda(x)\, \exp \sum_{\zeta=1}^{m} a_\zeta t_\zeta + w_\lambda(x) \mathfrak{P}_j\, \exp \sum_{\zeta=1}^{m} a_\zeta t_\zeta =$$

$$= -\,a_j w_\lambda(x)\, \exp \sum_{\zeta=1}^{m} a_\zeta t_\zeta + a_j w_\lambda(x)\, \exp \sum_{\zeta=1}^{m} a_\zeta t_\zeta = 0,$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{X},\ j = \overline{1,m}\,,\ j \neq \lambda.$$

Отсюда и тождества (32) следует, что система (IAPCD) имеет первый интеграл (31). ■

4. Интегральные точки

Интегральная точка. Вес интегральной точки. Достаточные условия построения неавтономного первого интеграла. Достаточные условия построения автономного первого интеграла. Достаточные условия построения неавтономного первого интеграла или последнего множителя. Достаточные условия построения автономного первого интеграла или последнего множителя.

4.1. Системы (APCD) класса $\mathfrak{B}$.

Определение 1. *Для системы* (APCD$\mathfrak{A}$) *точку* $A_\lambda(x^\lambda)$ *фазового пространства* $\mathbb{C}^n$ *назовём* ***интегральной точкой*** *веса* ρ_λ *по базе* $\theta_\lambda = \{\theta_{\lambda 1}, \ldots, \theta_{\lambda\rho_\lambda}\}$, *если при* $1 \leqslant \rho_\lambda \leqslant m$ *выполняются условия*

$$W_{k\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0,\ \ R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} \theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0,\ \ \operatorname{Re}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0,$$

$$\operatorname{Im}\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0,\ \ \operatorname{Re}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0,$$

$$\operatorname{Im}\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0,\ \ S_{\nu\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \qquad (1)$$

$$k = \overline{1, s+r}\,,\ l = \overline{1, s}\,,\ \xi_l = \overline{1, \varepsilon_l}\,,\ h_{\xi_l} \in \mathbb{N},\ g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}\,,\ \mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s}+\mathfrak{r}}\,,$$

$$\mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}\,,\ \zeta_\mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{e}_\mathfrak{l}}\,,\ \mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}} \in \mathbb{N},\ \mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}} = \overline{1, \mathfrak{f}_{\zeta_\mathfrak{l}}}\,,\ \nu = \overline{1, q}\,,\ j = \overline{1, \rho_\lambda}\,.$$

Пусть система (APCD$\mathfrak{A}$) имеет N интегральных точек $A_\lambda(x^\lambda)$ с весами $\rho_\lambda \geqslant 1$ по базам

$$\theta_\lambda = \bigl\{\theta_{\lambda 1}, \ldots, \theta_{\lambda\rho_\lambda}\bigr\},\ \lambda = \overline{1, N}\,,$$

соответственно.

Поставим в соответствие каждой интегральной точке $A_\lambda(x^\lambda)$ столбцы

$$P^{\theta_\lambda}(x) = \bigl(P_{1\theta_\lambda}(x), \ldots, P_{n\theta_\lambda}(x)\bigr),\ \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

матрицы P.

Обозначим через U множество индексов тех столбцов матрицы $P,$ каждому из которых соответствует хотя бы одна интегральная точка $A_\lambda(x^\lambda)$ с весом $\rho_\lambda \geqslant 1;$ через $\mathfrak{u}$ — количество элементов множества $U;$ через $I_{(U)} = (I_1, \ldots, I_m),$ где $I_j \in \mathbb{C},$ причём, если $j \in U,$ то $I_j = 0.$

Для каждого столбца $P^j,$ $j \in U,$ составим матрицу из единиц и координат $x^\lambda = (x_{1\lambda}, \ldots, x_{n\lambda})$ интегральных точек $A_\lambda(x^\lambda),$ соответствующих этому столбцу, следующим образом: каждая строка этой матрицы имеет вид

$$\Bigl(1, x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \ldots, x_{n\lambda}, x_{1\lambda}^2, x_{1\lambda}x_{2\lambda}, \ldots, x_{n\lambda}^2, x_{1\lambda}^3, \ldots, x_{n\lambda}^{p_j - 1}\Bigr),$$

состоит из $\mathfrak{c}_j$ элементов, и всего в матрице s_j строк, где s_j — количество точек $A_\lambda,$ соответствующих столбцу $P^j.$ Обозначим эту матрицу $a_j.$ Она имеет размер $s_j \times \mathfrak{c}_j$ и ранг $\operatorname{rank} a_j = r_j.$

На основании матрицы a_j построим матрицу $b_j,$ размер которой $r_j \times \mathfrak{c}_j$ и ранг $\operatorname{rank} b_j = r_j.$

Для интегральных точек $A_\lambda,$ $\lambda = \overline{1, N}\,,$ введём число

$$\mathfrak{b} = \sum_{j \in U} r_j.$$

Если у системы (APCD$\mathfrak{A}$) существуют интегральные точки $A_\lambda(x^\lambda),$ $\lambda = \overline{1, N}\,,$ с весами ρ_λ и числом $\mathfrak{b} \geqslant 0,$ то будем говорить, что система (APCD$\mathfrak{A}$) принадлежит классу $\mathfrak{B}$ и *обозначать* (APCD$\mathfrak{B}$).

4.2. Интегралы систем (APCD$\mathfrak{B}$).

Теорема 1. *Система* (APCD$\mathfrak{B}$) *при* $\ell + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m + 1$ *имеет на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ *первый интеграл*

$$W\colon\, (t, x) \to X(x)\exp\bigl(I_{(U)}t + Y(x)\bigr),\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'. \qquad (2)$$

Доказательство. Функция (2) в силу тождеств (4.2) будет первым интегралом системы (APCD$\mathfrak{B}$) тогда и только тогда, когда

$$\Xi(x) + I_{(U)} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad (3)$$

Обозначим через c_j квадратную матрицу порядка r_j с определителем, отличным от нуля, полученную из $(r_j \times \mathfrak{c}_j)$-матрицы b_j вычёркиванием $\mathfrak{c}_j - r_j$ столбцов, $j \in U$. Через $\overset{*}{W}{}^k$, $\overset{*}{R}{}^l_{h_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, $\overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{\mathfrak{k}}$, $\overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}$, $\overset{*}{S}{}^\nu$ обозначим векторы-полиномы, которые образованы соответственно из векторов-полиномов

$$W^k(x) = \big(W_{k1}(x), \ldots, W_{km}(x)\big),$$

$$R^l_{h_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) = \Big(R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} 1}(x), \ldots, R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} m}(x)\Big),$$

$$\mathfrak{W}^{\mathfrak{k}}(x) = \big(\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}1}(x), \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}m}(x)\big),$$

$$\mathfrak{R}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x) = \Big(\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} 1}(x), \ldots, \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} m}(x)\Big),$$

$$S^\nu(x) = \big(S_{\nu1}(x), \ldots, S_{\nu m}(x)\big),$$

$$k = \overline{1, s+r}\,,\ l = \overline{1, s}\,,\ \xi_l = \overline{1, \varepsilon_l}\,,\ h_{\xi_l} \in \mathbb{N},\ g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}\,,$$

$$\mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s} + \mathfrak{r}}\,,\ \mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}\,,\ \zeta_{\mathfrak{l}} = \overline{1, \mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}}\,,\ \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \in \mathbb{N},\ \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} = \overline{1, \mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}\,,\ \nu = \overline{1, q}\,,$$

следующим образом.

Если $j \notin U$, то j-я компонента исходного вектора-полинома остаётся без изменения, а если $j \in U$, то j-я компонента исходного вектора-полинома изменяется так, что коэффициенты при степенях переменных x, соответствующих степеням x^λ в $(r_j \times r_j)$-матрице c_j, берутся равными нулю, а коэффициенты при остальных степенях x остаются без изменения.

Система

$$\overset{*}{\Xi}(x) + I_{(U)} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad (4)$$

где функция

$$\overset{*}{\Xi}\colon x \to \sum_{k=1}^{s+r} \gamma_k \overset{*}{W}{}^k(x) + \sum_{l=1}^{s} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} \overset{*}{R}{}^l_{h_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) +$$

$$+ 2\sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \eta_{\mathfrak{k}} \operatorname{Re} \overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{\mathfrak{k}}(x) + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \tau_{\mathfrak{k}} \operatorname{Im} \overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{\mathfrak{k}}(x) + \sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu \overset{*}{S}{}^\nu(x) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Re} \overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\mathfrak{e}_{\mathfrak{l}}} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Im} \overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

распадается на систему, которая при $\ell + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m + 1$ состоит из $\mathfrak{c} - \mathfrak{b}$ линейных уравнений с $\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + 1$ неизвестными.

Такая система всегда имеет нетривиальное решение

$$\begin{gathered} I_j = \overset{*}{I}_j, \ \ \gamma_k = \overset{*}{\gamma}_k, \ \ \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} = \overset{*}{\alpha}_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \ \ \eta_{\mathfrak{k}} = \overset{*}{\eta}_{\mathfrak{k}}, \\ \tau_{\mathfrak{k}} = \overset{*}{\tau}_{\mathfrak{k}}, \ \ \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} = \overset{*}{\varphi}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}, \ \ \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} = \overset{*}{\psi}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}, \ \ \beta_\nu = \overset{*}{\beta}_\nu. \end{gathered} \tag{5}$$

Пусть

$$\overset{**}{\Xi}(x) = \Xi(x) - \overset{*}{\Xi}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

при (5). Тогда, принимая во внимание (1) и (4), получаем, что

$$\overset{**}{\Xi}(x^\lambda) = 0, \ \lambda = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Система (6) является однородной системой $\mathfrak{b}$ линейных уравнений с $\mathfrak{b}$ неизвестными, которые суть коэффициенты при степенях x^{λ} в $(r_j\times r_j)$-матрице $c_j,\ j\in U.$ Определитель этой системы $\det\Big(\operatorname*{diag}\limits_{j\in U}\ c_j\Big)$ отличен от нуля. Поэтому

$$\overset{**}{\Xi}(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n. \qquad (7)$$

Из (4) и (7) вытекает (3), а значит, функция (2) при (5) является первым интегралом системы (APCD$\mathfrak{B}$). ■

На автономный случай аналогичным образом доказывается следующая закономерность.

Теорема 2. *Система* (APCD$\mathfrak{B}$) *при* $\ell+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}+1$ *имеет автономный первый интеграл* (1.3) *на области* $\mathcal{X}'$.

Теорема 3. *Пусть система* (APCD$\mathfrak{B}$) *такова, что*

$$\operatorname{div}P^j(x^{\lambda})=\,-\,I_j,\ \lambda=\overline{1,N},\ j\in U. \qquad (8)$$

Тогда при $\ell+\mathfrak{b}-\mathfrak{u}=\mathfrak{c}-m$ *система* (APCD$\mathfrak{B}$) *имеет либо первый интеграл* (5.2) *на* $\mathbb{R}^m\times\mathcal{X}'$, *либо последний множитель* (7.2).

Доказательство. Функция (7.2) в силу тождества (4.2) будет последним множителем системы (APCD$\mathfrak{B}$) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (8.2).

Функция (2) в силу тождества (4.2) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m\times\mathcal{X}'$ системы (APCD$\mathfrak{B}$) если и только если выполняется система тождеств (3).

Как и ранее, введём в рассмотрение $(r_j\times r_j)$-матрицу c_j, векторы-полиномы $\overset{*}{W}{}^{k},\ \overset{*}{R}{}^{l}_{h_{\xi_l}g_{\xi_l}},\ \overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{\mathfrak{k}},\ \overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}},\ \overset{*}{S}{}^{\nu}$, а также вектор-полином $\overset{*}{\operatorname{div}}P$, который получаем из вектора-полинома

$$\operatorname{div}P(x)=\big(\operatorname{div}P^1(x),\ldots,\operatorname{div}P^m(x)\big),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

по аналогичному правилу.

Система тождеств

$$\overset{*}{\Xi}(x)+I_{(U)}=-\overset{*}{\operatorname{div}}P(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n, \qquad (9)$$

распадается на систему, которая при $\ell+\mathfrak{b}-\mathfrak{u}=\mathfrak{c}-m$ состоит из $\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$ линейных, вообще говоря, неоднородных, уравнений с $\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$ неизвестными; а система тождеств (4) распадается на однородную систему $\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$ линейных уравнений с теми же $\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$ неизвестными. Определители этих систем совпадают; обозначим его $\widetilde{\Delta}$.

Пусть определитель $\widetilde{\Delta}\neq 0.$ Тогда система, соответствующая тождествам (9), имеет единственное решение

$$I_j=\overset{**}{I}_j,\ \ \gamma_k=\overset{**}{\gamma}_k,\ \ \alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}=\overset{**}{\alpha}_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}},\ \ \eta_{\mathfrak{k}}=\overset{**}{\eta}_{\mathfrak{k}},$$
$$\tau_{\mathfrak{k}}=\overset{**}{\tau}_{\mathfrak{k}},\ \ \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}=\overset{**}{\varphi}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}},\ \ \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}}=\overset{**}{\psi}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_\mathfrak{l}}\mathfrak{g}_{\zeta_\mathfrak{l}}},\ \ \beta_\nu=\overset{**}{\beta}_\nu\,. \tag{10}$$

Пусть

$$\widetilde{\widetilde{\Xi}}\colon x\to\Xi(x)-\overset{*}{\Xi}(x)+\operatorname{div}P(x)-\overset{*}{\operatorname{div}}P(x)+I-I_{(U)},\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

при (10).

Принимая во внимание (1), (8) и (9), устанавливаем, что

$$\widetilde{\widetilde{\Xi}}(x^\lambda)=0,\ \ \lambda=\overline{1,N}.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 1, получаем тождество

$$\widetilde{\widetilde{\Xi}}(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Из (9) и (11) вытекает (10), а значит, функция μ при (10) является последним множителем системы (APCD$\mathfrak{B}$).

При $\widetilde{\Delta}=0$ рассматриваем систему тождеств (4), на основании решений которой строим функцию (2). Она и будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m\times\mathfrak{X}'$ системы (APCD$\mathfrak{B}$), что доказываем также, как и в случае теоремы 1. ■

В процессе доказательства теоремы 3, по сути дела, были доказаны следующие два утверждения.

Следствие 1. *Пусть система* (APCD$\mathfrak{B}$) *такова, что выполняются условия* (8). *Тогда при* $\ell+\mathfrak{b}-\mathfrak{u}=\mathfrak{c}-m,$ *когда* *определитель* $\widetilde{\Delta} \neq 0,$ *система* (APCD$\mathfrak{B}$) *имеет последний множитель* (7.2).

Следствие 2. *Пусть система* (APCD$\mathfrak{B}$) *такова, что выполняются условия* (8). *Тогда при* $\ell + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m,$ *когда определитель* $\widetilde{\Delta} = 0,$ *система* (APCD$\mathfrak{B}$) *имеет первый интеграл* (2) *на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'.$

Для автономного последнего множителя (2.3) и автономного первого интеграла (1.3) системы (APCD$\mathfrak{B}$) аналогами теоремы 3 и следствий 1 и 2 будут следующие теорема 4 и следствия 3 и 4 из неё. В следствиях 3 и 4 через $\widetilde{\Lambda}$ обозначаем определитель, соответствующий определителю $\widetilde{\Delta}$ на автономный случай.

Теорема 4. *Пусть система* (APCD$\mathfrak{B}$) *такова, что*

$$\operatorname{div} P^j(x^\lambda) = 0,\ \lambda = \overline{1, N},\ j \in U. \tag{12}$$

Тогда при $\ell + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ *система* (APCD$\mathfrak{B}$) *имеет либо автономный последний множитель* (2.3), *либо автономный первый интеграл* (1.3) *на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'.$

Следствие 3. *Пусть система* (APCD$\mathfrak{B}$) *такова, что выполняются условия* (12). *Тогда при* $\ell + \mathfrak{b} = \mathfrak{c},$ *когда определитель* $\widetilde{\Lambda} \neq 0,$ *система* (APCD$\mathfrak{B}$) *имеет автономный последний множитель* (2.3).

Следствие 4. *Пусть система* (APCD$\mathfrak{B}$) *такова, что выполняются условия* (12). *Тогда при* $\ell + \mathfrak{b} = \mathfrak{c},$ *когда определитель* $\widetilde{\Lambda} = 0,$ *система* (APCD$\mathfrak{B}$) *имеет автономный первый интеграл* (1.3) *на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'.$

4.3. Интегралы систем (IAPCD$\mathfrak{B}$). Адаптируя определение 1 на случай обыкновенных дифференциальных систем (полагая $m = 1$) и используя методы докательства теорем 3.3 и 4.3, а также теорем 1, 2 и 3, с учётом теоремы 3.2, получаем следующие утверждения для вполне разрешимых систем (APCD) класса $\mathfrak{B}.$

Теорема 5. *Пусть система* (IAPCD$\mathfrak{B}$) *такова, что обыкновенная дифференциальная система* (APDk) *принадлежит классу* $\mathfrak{B}$ *и не имеет на области* $\mathcal{X}'$ *первых интегралов* (3.3). *Тогда система* (IAPCD$\mathfrak{B}$) *при* $\ell + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k + 1$ *имеет первый интеграл* (2) *на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'.$

Теорема 6. *Пусть система* (IAPCD$\mathfrak{B}$) *такова, что существует* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *такое, что обыкновенная дифференциальная система* (APDk) *принадлежит классу* $\mathfrak{B}$, *не имеет на области* $\mathcal{X}'$ *первых интегралов* (3.3) *и*

$$\Phi\colon x \to \Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,,\ j \ne k, \tag{13}$$

индуцированного семейством (9.3), *расходимость*

$$\operatorname{div} P^k(x^\lambda) = -I_k,\ \lambda = \overline{1, N},\ I_k \in \mathbb{R}.$$

Тогда при $\ell + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ *система* (IAPCD$\mathfrak{B}$) *имеет либо последний множитель* (7.2), *либо первый интеграл* (2) *на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$.

Следствие 5. *Пусть система* (IAPCD$\mathfrak{B}$) *такова, что существует* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *такое, что система* (APDk) *принадлежит классу* $\mathfrak{B}$, *не имеет на области* $\mathcal{X}'$ *первых интегралов* (3.3), *определитель* $\widetilde{\Delta}_k = 0$. *Тогда при* $\ell + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ *скалярная функция* (2) *является первым интегралом на области* $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ *системы* (IAPCD$\mathfrak{B}$).

Следствие 6. *Пусть система* (IAPCD$\mathfrak{B}$) *такова, что существует* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *такое, что система* (APDk) *принадлежит классу* $\mathfrak{B}$, *не имеет на пространстве* $\mathbb{R}^n$ *первых интегралов вида* (13), *определитель* $\widetilde{\Delta}_k \ne 0$, *расходимость* $\operatorname{div} P^k(x^\lambda) = -I_k$, $\lambda = \overline{1, N}$, $I_k \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $\ell + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ *система* (IAPCD$\mathfrak{B}$) *имеет последний множитель* (7.2).

Пример 1. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{gathered} dx_1 = (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dt_1 - 2x_1x_2\, dt_2, \\ dx_2 = -2x_1x_2\, dt_1 + (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)\, dt_2,\ \ dx_3 = -2x_3(x_1\, dt_1 + x_2\, dt_2) \end{gathered} \tag{14}$$

является вполне разрешимой и в соответствии с теоремой 2.1.5.1 имеет один автономный первый интеграл, ибо $n - \operatorname{rank} P(x) = 3 - 2 = 1$.

Полиномы

$$w_1\colon x \to x_3,\ \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{и} \quad w_2\colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

являются автономными полиномиальными частными интегралами системы (14), которым в тождествах (4.2) соответствуют полиномы

$$W_{11}(x) = -2x_1, \ \ W_{12}(x) = -2x_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

и

$$W_{21}(x) = -2x_1, \ \ W_{22}(x) = -2x_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Числа $\ell = 2, \ \mathfrak{c} = 8.$

У системы уравнений (14) выделим следующие интегральные точки (они регулярные):

$A_1(0,1,0)$ и $A_2(0,2,0)$ с весами $\rho_1 = \rho_2 = 1$ по общей базе $\theta_1 = \theta_2 = \{1\};$

$A_3(1,0,0)$ и $A_4(2,0,0)$ с весами $\rho_3 = \rho_4 = 1$ по общей базе $\theta_3 = \theta_4 = \{2\};$

$A_5(0,0,1)$ с весом $\rho_5 = 2$ по базе $\theta_5 = \{1;2\},$ для которых $U = \{1;2\}, \ \mathfrak{u} = 2.$

Матрицы $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$ имеют размер 3×4 и ранг, равный 3.

Поэтому для интегральных точек $A_1, \ldots, A_5$ число $\mathfrak{b} = 6.$

Если учесть, что $\ell + \mathfrak{b} = 2 + 6 = 8 = \mathfrak{c},$ а определитель $\widetilde{\Lambda} = 0,$ то в силу следствия 2 система (14) имеет автономный первый интеграл

$$F\colon x \to \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_3}\,, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

на любой области $\mathcal{X}$ из множества $\mathbb{R}^3 \backslash \{x\colon x_3 = 0\}.$

Пример 2. Вполне разрешимая система

$$\begin{aligned} dx_1 &= \big(1 + (x_1 - x_2)(1 + 3x_1 - x_2)\big)\, dt_1 + \big(1 + (x_1 - x_2)(1 + 2x_1)\big)\, dt_2, \\ dx_2 &= \big(1 + (x_1 - x_2)(1 + 2x_1)\big)\, dt_1 + \big(1 + (x_1 - x_2)(1 + x_1 + x_2)\big)\, dt_2 \end{aligned} \tag{15}$$

имеет частный интеграл

$$w_1\colon x \to x_1 - x_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

кратности $\varkappa = 2,$ у которого в тождествах (4.2) полиномы

$$W_{11}(x) = W_{12}(x) = x_1 - x_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$Q_{11}(x) = R_{111}(x) = R_{112}(x) = -1, \ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

В соответствии с утверждением 2) теоремы 5.3 функция

$$F\colon (t,x) \to \frac{1}{x_1 - x_2} + t_1 + t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

является первым интегралом на области $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon x_2 = x_1\}$ системы (15).

Теперь автономный полиномиальный частный интеграл

$$w_1\colon x \to x_1 - x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

системы (15) будем рассматривать без учёта его кратности.

Для него число $\ell = 1$ и существуют две интегральные точки (они сингулярные) $A_1(1,1)$ и $A_2(2,2)$ такие, что для системы (APD1) их веса $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

Число $\mathfrak{c}_1 = 3$.

Матрицы $a_1 = b_1$ имеют размер 2×3 и ранг, равный 2.

Значит, для интегральных точек A_1 и A_2 число $\mathfrak{b} = 2$.

Кроме того, расходимость

$$\operatorname{div} P^1(1,1) = \operatorname{div} P^1(2,2) = 0,$$

а определитель $\widetilde{\Delta}_1 \neq 0$.

Следовательно, $\ell + \mathfrak{b} = 1 + 2 = 3 = \mathfrak{c}_1$.

Обыкновенная дифференциальная система (APD1) не имеет первого интеграла $\Phi\colon x \to x_1 - x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$, вида (13).

Всё это в соответствии со следствием 6 означает, что система (15) имеет последний множитель

$$\mu\colon x \to \frac{1}{(x_1 - x_2)^4}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Пример 3. Вполне разрешимая система [1, с. 49]

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1^2 + x_2^2)\, dt_1 - 2x_1x_2\, dt_2, \\ dx_2 &= -2x_1x_2\, dt_1 + (x_1^2 - x_2^2)\, dt_2 \end{aligned} \tag{16}$$

имеет автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1\colon x \to x_1 + i\,x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{и} \quad \mathfrak{w}_2\colon x \to x_1 - i\,x_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

которым в тождествах (4.2) соответствуют полиномы

$$\mathfrak{W}_{11}(x) = -x_1 - i\,x_2,\ \ \mathfrak{W}_{12}(x) = -x_2 + i\,x_1,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

и

$$\mathfrak{W}_{21}(x) = -x_1 + i\,x_2,\ \ \mathfrak{W}_{22}(x) = -x_2 - i\,x_1,\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Число $\ell=2$.

Для системы (APD1) число $\mathfrak{c}_1=3$.

Интегральная точка (она особая) $A_1(0,0)$ системы (APD1) имеет вес $\rho_1=1$.

Матрицы $a_1=b_1$ размера 1×3 имеют ранг, равный 1, а значит, для точки A_1 число $\mathfrak{b}=1$.

Расходимость $\operatorname{div}P^{\,1}(0,0)=0$, определитель $\widetilde{\Delta}_1\ne 0$.

Отсюда следует, что $\ell+\mathfrak{b}=1+2=3=\mathfrak{c}_1$, и, кроме того, система (APD1) не имеет первых интегралов

$$\Phi\colon x\to(\gamma_1+\gamma_2+4)x_1+i(\gamma_1-\gamma_2)x_2,\ \forall x\in\mathbb{R}^2,$$

вида (13).

Поэтому система (16), по следствию 6, имеет последний множитель

$$\mu\colon x\to\frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^2}\,,\ \forall x\in\mathbb{R}^2\times\mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ — область из $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Пример 4. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1&=(\,-x_2+x_1^2-2x_1x_2-x_2^2)\,dt_1+(\,-x_2-x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)\,dt_2,\\ dx_2&=(x_1+x_1^2+2x_1x_2-x_2^2)\,dt_1+(x_1-x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)\,dt_2\end{aligned}\tag{17}$$

имеет комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1\colon x\to x_1+i\,x_2\quad \text{и}\quad \mathfrak{w}_2\colon x\to x_1-i\,x_2,\ \forall x\in\mathbb{R}^2,$$

с функциями

$$\mathfrak{W}_{11}(x)=x_1-x_2+i(1+x_1+x_2),\ \forall x\in\mathbb{R}^2,$$

$$\mathfrak{W}_{12}(x)=\,-x_1+x_2+i(1-x_1-x_2),\ \forall x\in\mathbb{R}^2,$$

и

$$\mathfrak{W}_{21}(x)=x_1-x_2-i(1+x_1+x_2),\ \forall x\in\mathbb{R}^2,$$

$$\mathfrak{W}_{22}(x)=\,-x_1+x_2-i(1-x_1-x_2),\ \forall x\in\mathbb{R}^2.$$

У системы (17) выделим две интегральные точки: $A_1(\,-0{,}5,\,-0{,}5)$ с весом $\rho_1=1$ по базе $\theta_1=\{1\}$ и $A_2(0{,}5,0{,}5)$ с весом $\rho_2=1$ по базе $\theta_2=\{2\}$.

При этом $\mathfrak{b} = r_1 + r_2 = 2 + 2 = 4.$

Кроме того

$$\ell = 2, \ \mathfrak{c} = \binom{2+2-1}{2} + \binom{2+2-1}{2} = 6,$$

а значит, $\ell + \mathfrak{b} = 2 + 4 = 6 = \mathfrak{c}.$

Поскольку

$$\operatorname{div} P^{\,1}(\,-0{,}5,\ -0{,}5) = \operatorname{div} P^{\,2}(0{,}5, 0{,}5) = 0,$$

то выполняются условия теоремы 4, и функция

$$\mu\colon x \to \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\},$ будет автономным последним множителем системы (17).

§4. Интегралы линейной автономной системы уравнений в полных дифференциалах

1. Линейный частный интеграл

Интегральная характеристическая система. Линейный однородный частный интеграл.

Рассмотрим линейную однородную автономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = A(x)\, dt, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $t = (t_1, \ldots, t_m)$ — точки пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, векторы-столбцы $dx = \operatorname{colon}(dx_1, \ldots, dx_n)$ и $dt = \operatorname{colon}(dt_1, \ldots, dt_m)$, элементами матрицы $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ (n строк, m столбцов) являются линейные однородные функции

$$a_{ij} \colon x \to \sum_{\xi=1}^{n} a_{ij\xi} x_{\xi}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

с коэффициентами $a_{ij\xi} \in \mathbb{R}$, $\xi = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$.

Система (1) индуцирует автономные линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{p}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m},$$

которые не являются линейно связанными на $\mathbb{R}^n$. При этом по необходимости $m < n$.

Для того чтобы комплекснозначная линейная однородная функция

$$p\colon x \to \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ (b_i \in \mathbb{C}, \ i = \overline{1,n}\,,)$$

была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно выполнения системы тождеств

$$\mathfrak{p}_j p(x) = p(x)\lambda^j, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ \lambda^j \in \mathbb{C}, \ j = \overline{1,m}\,. \tag{2}$$

Система тождеств (2) имеет место тогда и только тогда, когда совместна линейная однородная система

$$(A_j - \lambda^j E)\, b = 0, \ j = \overline{1,m}\,, \tag{3}$$

где $b = \operatorname{colon}(b_1, \ldots, b_n)$, E — единичная матрица, квадратные матрицы n-го порядка $A_j = \|a_{\xi j i}\|$, $j = \overline{1,m}$, (ξ — номер строки, i — номер столбца).

Систему

$$\det(A_j - \lambda^j E) = 0, \ j = \overline{1,m}\,, \tag{4}$$

назовём ***интегральной характеристической системой,*** *а её корни будем называть* ***интегральными характеристическими корнями*** *дифференциальной системы* (1).

Условия Фробениуса

$$[\mathfrak{p}_j(x), \mathfrak{p}_\zeta(x)] = \mathfrak{O}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}\,, \ \zeta = \overline{1,m}\,,$$

полной разрешимости системы (1) равносильны перестановочности матриц:

$$A_j A_\zeta = A_\zeta A_j, \ j = \overline{1,m}\,, \ \zeta = \overline{1,m}\,.$$

Лемма 1. *Пусть* $\nu\,(\nu \in \mathbb{C}^n)$ *— общий собственный вектор матриц* $A_j, \ j = \overline{1,m}$. *Тогда частным интегралом вполне разрешимой системы* (1) *является линейная однородная функция*

$$p\colon x \to \nu x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Действительно, если ν — общий собственный вектор перестановочных матриц A_j, $j = \overline{1,m}$, то он является решением [20, с. 191 − 194] линейной однородной системы (3), где λ^j — собственные числа соответственно матриц A_j, $j = \overline{1,m}$, которым соответствует собственный вектор ν.

Тогда выполняется система тождеств (2) относительно линейной функции (5):

$$\mathfrak{p}_j(\nu x) = \lambda^j \nu x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}\,.$$

А значит, функция (5) является частным интегралом дифференциальной системы (1). ■

2. Автономный базис первых интегралов

Построение автономных первых интегралов по собственным векторам матриц системы.

2.1. Случай вещественных интегральных характеристических корней.

Теорема 1. *Пусть* $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1}\,,$ *— общие вещественные собственные векторы матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m}\,.$ *Тогда скалярная функция*

$$W\colon x\to\prod_{k=1}^{m+1}\bigl|\nu^k x\bigr|^{h_k}, \qquad (1)$$

где вещественные числа $h_k,\ k=\overline{1,m+1}\,,$ *являются нетривиальным решением линейной однородной системы*

$$\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k^j h_k=0,\ j=\overline{1,m}\,,$$

в которой λ_k^j *— вещественные собственные числа матриц* $A_j,$ *которым соответствуют собственные векторы* $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1}\,,\ j=\overline{1,m}\,,$ *на любой области из множества определения* $\mathrm{D}W$ *будет автономным первым интегралом вполне разрешимой системы* (1.1).

Доказательство. Пусть $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1}\,,$ — общие вещественные собственные векторы матриц $A_1,\ldots,A_m.$

Тогда у этих матриц существуют вещественные собственные числа $\lambda_k^j,\ j=\overline{1,m}\,,$ которым соответствуют собственные векторы $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1}\,.$

Согласно лемме 1.1 линейные однородные функции

$$p_k\colon x\to\nu^k x,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ k=\overline{1,m+1}\,,$$

являются частными интегралами системы (1.1), и выполняется система тождеств

$$\mathfrak{p}_j p_k(x) = \lambda_k^j\, p_k(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ j = \overline{1,m}\,,\ k = \overline{1,m+1}\,. \qquad (2)$$

Составим функцию

$$W\colon x \to \prod_{k=1}^{m+1} |p_k(x)|^{h_k}\,,\ \forall x \in \mathcal{X},\ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n,$$

где $h_k,\ k = \overline{1,m+1}\,,$ — вещественные числа, одновременно не равные нулю.

Производные Ли этой функции в силу системы (1.1):

$$\mathfrak{p}_j W(x) = \prod_{k=1}^{m+1} |p_k(x)|^{h_k-1} \sum_{k=1}^{m+1} \operatorname{sgn} p_k(x)\, h_k \prod_{l=1, l\ne k}^{m+1} \bigl|p_l(x)\bigr|\, \mathfrak{p}_j p_k(x),$$

$$\forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1,m}\,.$$

С учётом тождеств (2) устанавливаем, что

$$\mathfrak{p}_j W(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j\, h_k\, W(x), \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1,m}.$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j\, h_k = 0,\ j = \overline{1,m}\,,$ то функция (1) будет первым интегралом дифференциальной системы (1.1). ■

Следствие 1. *Пусть* $\nu^k,\ k = \overline{1,m+1}\,,$ *— общие вещественные собственные векторы матриц* $A_j,\ j = \overline{1,m}\,.$ *Тогда автономным первым интегралом вполне разрешимой системы* (1.1) *будет скалярная функция*

$$W_{12\ldots m(m+1)}\colon x \to \prod_{k=1}^{m} \bigl|\nu^k x\bigr|^{-\triangle_k} \bigl|\nu^{m+1} x\bigr|^{\triangle},\ \forall x \in \mathcal{X},$$

где определитель $\triangle = \bigl|\lambda_k^j\bigr|,$ *а определители* $\triangle_k,\ k = \overline{1,m}\,,$ *получены заменой* k*-го столбца в определителе* $\triangle$ *на столбец* $\operatorname{colon}\bigl(\lambda_{m+1}^1, \ldots, \lambda_{m+1}^m\bigr),$ λ_k^j *— вещественные собственные* *числа матриц* A_j, *которым соответствуют собственные векторы* ν^k, $k=\overline{1,m+1}$, $j=\overline{1,m}$.

Пример 1. *Построим базис автономных первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах*

$$\begin{aligned} &dx_1 = -x_1\,dt_2, \quad dx_2 = 2(x_3+x_4)\,dt_1 + x_2\,dt_2,\\ &dx_3 = x_2\,dt_1 + x_4\,dt_2, \quad dx_4 = x_2\,dt_1 + x_3\,dt_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Матрицы

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

перестановочны. Значит, система (3) вполне разрешима.

Собственными числами матриц A_1 и A_2 соответственно являются

$$\lambda_1^1 = -2,\ \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = 0,\ \lambda_4^1 = 2 \quad \text{и} \quad \lambda_1^2 = 1,\ \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = -1,\ \lambda_4^2 = 1,$$

которые находим как корни характеристических уравнений

$$\det(A_1 - \lambda^1 E) = 0 \iff (\lambda^1+2)(\lambda^1)^2(\lambda^1-2) = 0$$

и

$$\det(A_2 - \lambda^2 E) = 0 \iff (\lambda^1+1)^2(\lambda^1-1)^2 = 0.$$

Матрицы A_1 и A_2 приведём к жордановым нормальным формам

$$J_1 = \operatorname{diag}\{-2,0,0,2\} \quad \text{и} \quad J_2 = \operatorname{diag}\{1,-1,-1,1\}$$

так, чтобы в представлениях $A_1 = B_1 J_1 B_1^{-1}$ и $A_2 = B_2 J_2 B_2^{-1}$ матрицы перехода B_1 и B_2 были равными, например:

$$B_1 = B_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Поэтому общими вещественными линейно независимыми собственными векторами матриц A_1 и A_2 будут

$$\nu^1 = (0,-1,1,1),\ \nu^2 = (1,0,0,0),\ \nu^3 = (0,0,1,-1),\ \nu^4 = (0,1,1,1).$$

Определители:

$$\triangle = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \ \triangle_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \ \triangle_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\triangle_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \ \triangle_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Тогда скалярные функции

$$W_{123}\colon x \to (x_3 - x_4)^2 x_1^{-2}, \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{4}$$

и

$$W_{124}\colon x \to x_1^4 \big(x_2^2 - (x_3 + x_4)^2\big)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^4, \tag{5}$$

будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов системы (3) на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{x\colon x_1 \neq 0\}$.

2.2. Случай комплексных интегральных характеристических корней. В случае, когда p — комплекснозначный частный интеграл дифференциальной системы (1.1), система тождеств (2.1) распадается на вещественную систему тождеств

$$\begin{gathered} \mathfrak{p}_j \operatorname{Re} p(x) = \operatorname{Re} p(x) \overset{*}{\lambda}{}^j - \operatorname{Im} p(x) \widetilde{\lambda}{}^j, \\ \mathfrak{p}_j \operatorname{Im} p(x) = \operatorname{Re} p(x) \widetilde{\lambda}{}^j + \operatorname{Im} p(x) \overset{*}{\lambda}{}^j, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda^j = \overset{*}{\lambda}{}^j + \widetilde{\lambda}{}^j\, i, \ j = \overline{1, m}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Тем самым получаем критерий существования комплекснозначного частного интеграла.

Лемма 1. *Линейная функция p является комплекснозначным частным интегралом системы* (1.1) *тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств* (6).

С учётом этого критерия устанавливаем следующие закономерности относительно комплекснозначного частного интеграла дифференциальной системы (1.1).

Свойство 1. *Если система* (1.1) *имеет комплекснозначный частный интеграл p, то комплексно сопряжённая функция $\overline{p}$ также является частным интегралом системы* (1.1). *При этом наряду с системой тождеств* (2.1) *имеет ме-*

сто и система тождеств

$$\mathfrak{p}_j \overline{p}(x) = \overline{p}(x)\, \overline{\lambda^j}\,, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m}\,,$$

где числа $\overline{\lambda^j}$ *комплексно сопряжены с числами* λ^j, $j = \overline{1,m}$.

Свойство 2. *Если система* (1.1) *имеет комплекснозначный частный интеграл* p, *то вещественный полином*

$$P\colon x \to \operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

является частным интегралом системы (1.1) *и на пространстве* $\mathbb{R}^n$ *выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{p}_j \big(\operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x)\big) \equiv 2\big(\operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x)\big) \overset{*}{\lambda}{}^j, \ j = \overline{1,m}\,, \tag{8}$$

где числа λ^j, $j = \overline{1,m}$, *находятся из тождеств* (2.1).

Свойство 3. *Пусть система* (1.1) *имеет комплекснозначный частный интеграл* p. *Тогда производные Ли в силу дифференциальной системы* (1.1) *экспоненциальной функции* $\psi\colon x \to \exp \varphi(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, *при*

$$\varphi(x)\colon x \to \operatorname{arctg}\big(\operatorname{Im} p(x) \operatorname{Re}^{-1} p(x)\big), \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{9}$$

равны

$$\mathfrak{p}_j \exp \varphi(x) = \exp \varphi(x)\, \widetilde{\lambda}^j, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ j = \overline{1,m}\,, \tag{10}$$

где числа λ^j, $j = \overline{1,m}$, *находятся из тождеств* (2.1), *область* $\mathcal{X}$ *из пространства* $\mathbb{R}^n$ *такова, что её дополнение до* $\mathbb{R}^n$ *включает множество всех нулей функции* $\operatorname{Re} p$.

Из тождеств (10) следует формула вычисления производных Ли в силу системы (1.1) функции аргумента (9) комплекснозначного частного интеграла p этой системы:

$$\mathfrak{p}_j \varphi(x) = \widetilde{\lambda}^j, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ j = \overline{1,m}\,. \tag{11}$$

Свойство 4. *Произведение* $u_1 u_2$ *полиномов* $u_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *и* $u_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, *где* $\mathbb{K}$ *— поле вещественных* $\mathbb{R}$ *или комплексных* $\mathbb{C}$ *чисел, является частным интегралом* (*вещественным или комплекснозначным*) *системы* (1.1) *тогда и только* *тогда, когда его сомножители* u_1 *и* u_2 *являются частными интегралами дифференциальной системы* (1.1).

Свойство 5. *Вещественный полином* (7) *является частным интегралом системы* (1.1), *если и только если система* (1.1) *имеет комплекснозначный частный интеграл* p (*или комплексно сопряжённый ему*).

Теорема 2. *Пусть* $\nu^k = \overset{*}{\nu}{}^k + \widetilde{\nu}{}^k i,\ k=\overline{1,s},\ s \leqslant (m+1)/2,$ *и* $\nu^\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,,$ — *соответственно общие комплексные* (*среди которых нет комплексно сопряжённых*) *и вещественные собственные векторы матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m}\,.$ *Тогда автономным первым интегралом на области* $\mathcal{X}$ *вполне разрешимой системы* (1.1) *будет функция*

$$W\colon x \to \prod_{k=1}^{s} P_k^{\overset{*}{h}_k}(x)\exp\bigl(-2\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\bigr)\prod_{\theta=s+1}^{m+1-s}\bigl|\nu^\theta x\bigr|^{h_\theta}, \tag{12}$$

где $\mathcal{X}$ *есть область из множества определения* $\mathrm{D}W$, *полиномы* $P_k\colon x \to \bigl(\overset{*}{\nu}{}^k x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}{}^k x\bigr)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$ *скалярные функции* $\varphi_k\colon x \to \operatorname{arctg}\Bigl(\widetilde{\nu}{}^k x\,\bigl(\overset{*}{\nu}{}^k x\bigr)^{-1}\Bigr),\ \forall x\in\mathcal{X},\ k=\overline{1,s}\,,$ *а вещественные числа* $\overset{*}{h}_k,\ \widetilde{h}_k,\ k=\overline{1,s}\,,\ h_\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,,$ *составляют нетривиальное решение линейной системы*

$$2\sum_{k=1}^{s}\bigl(\overset{*}{\lambda}{}_k^j\,\overset{*}{h}_k - \widetilde{\lambda}{}_k^j\,\widetilde{h}_k\bigr) + \sum_{\theta=s+1}^{m+1-s}\lambda_\theta^j\,h_\theta = 0,\ j=\overline{1,m}\,,$$

где $\lambda_k^j = \overset{*}{\lambda}{}_k^j + \widetilde{\lambda}{}_k^j i,\ k=\overline{1,s}\,,$ *и* $\lambda_\theta^j,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s},$ *есть соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m}\,,$ *которым соответствуют собственные векторы* $\nu^k,\ k=\overline{1,s}\,,$ *и* $\nu^\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,.$

Доказательство. Пусть $\nu^k = \overset{*}{\nu}{}^k + \widetilde{\nu}{}^k i,\ k=\overline{1,s}\,, s\leqslant (m+1)/2,$ и $\nu^\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,,$ — соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}\,.$

Тогда у этих матриц существуют комплексные $\lambda_k^j,\ k=\overline{1,s}$, и вещественные $\lambda_\theta^j,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}$, $j=\overline{1,m}$, собственные числа, которым соответствуют собственные векторы $\nu^k,\ k=\overline{1,s}$, и $\nu^\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}$.

Согласно лемме 1.1 линейные функции

$$p_k\colon x\to \nu^k x,\ k=\overline{1,s}, \quad \text{и} \quad p_\theta\colon x\to\nu^\theta x,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s},$$

являются на $\mathbb{R}^n$ частными интегралами системы (1.1).

Отсюда, с учётом свойства 2, заключаем, что на пространстве $\mathbb{R}^n$ выполняется система тождеств

$$\begin{gathered}\mathfrak{p}_j\Big(\big(\overset{*}{\nu}{}^k x\big)^2+\big(\widetilde{\nu}{}^k x\big)^2\Big)\equiv 2\Big(\big(\overset{*}{\nu}{}^k x\big)^2+\big(\widetilde{\nu}{}^k x\big)^2\Big)\overset{*}{\lambda}{}_k^j,\\ \mathfrak{p}_j\nu^\theta x\equiv\lambda_\theta^j\,\nu^\theta x,\ \ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,s},\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}.\end{gathered}\tag{13}$$

Составим скалярную функцию

$$W\colon x\to\prod_{k=1}^{s}P_k^{\overset{*}{h}_k}(x)\exp\big(-2\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\big)\prod_{\theta=s+1}^{m+1-s}\big|\nu^\theta x\big|^{h_\theta},\ \forall x\in\mathcal{X},$$

где $\overset{*}{h}_k,\ \widetilde{h}_k,\ k=\overline{1,s}$, и $h_\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}$, — вещественные числа, одновременно не равные нулю.

Производные Ли в силу дифференциальной системы (1.1)

$$\mathfrak{p}_jW(x)=\Bigg(\prod_{k=1}^{s}P_k^{\overset{*}{h}_k-1}(x)\exp\big(-2\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\big)\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{s}\overset{*}{h}_k\prod_{l=1,l\neq k}^{s}P_l(x)\,\mathfrak{p}_jP_k(x)+$$

$$+\prod_{k=1}^{s}P_k^{\overset{*}{h}_k}(x)\exp\big(-2\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\big)\sum_{k=1}^{s}\mathfrak{p}_j\big(-2\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\big)\Bigg)\cdot$$

$$\cdot \prod_{\theta=s+1}^{m+1-s} \bigl|\nu^{\theta}x\bigr|^{h_\theta} + \prod_{k=1}^{s} P_k^{\overset{*}{h}_k}(x)\exp\bigl(-2\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\bigr) \prod_{\theta=s+1}^{m+1-s} \bigl|\nu^{\theta}x\bigr|^{h_\theta-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\theta=s+1}^{m+1-s} \operatorname{sgn}\bigl(\nu^{\theta}x\bigr)\,h_\theta \prod_{l=s+1, l\neq\theta}^{m+1-s} \bigl|\nu^{l}x\bigr|\,\mathfrak{p}_j\bigl(\nu^{\theta}x\bigr),\ \forall x\in\mathfrak{X},\ j=\overline{1,m}\,.$$

Отсюда на основании тождеств (13), свойств 2 и 3 устанавливаем, что

$$\mathfrak{p}_j W(x) \equiv \Biggl(\sum_{k=1}^{s} 2\bigl(\overset{*}{\lambda}{}_k^j\,\overset{*}{h}_k - \widetilde{\lambda}{}_k^j\,\widetilde{h}_k\bigr) + \sum_{\theta=s+1}^{m+1-s} \lambda_\theta^j\,h_\theta\Biggr)W(x),\ j=\overline{1,m}\,.$$

Если $2\sum\limits_{k=1}^{s}\bigl(\overset{*}{\lambda}{}_k^j\,\overset{*}{h}_k - \widetilde{\lambda}{}_k^j\,\widetilde{h}_k\bigr) + \sum\limits_{\theta=s+1}^{m+1-s}\lambda_\theta^j\,h_\theta,\ j=\overline{1,m}\,,$ то функция (12) будет первым интегралом системы (1.1). ■

Пример 2. Для вполне разрешимой системы

$$dx_1 = x_1\,dt_1 + x_2\,dt_2,\ \ dx_2 = x_2\,dt_1 - x_1\,dt_2,\ \ dx_3 = x_3\,dt_1 - x_3\,dt_2 \quad (14)$$

по собственным числам

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = 1;\ \ \lambda_1^2 = -i,\ \lambda_2^2 = i,\ \lambda_3^2 = -1$$

и общим линейно независимым собственным векторам

$$\nu^1 = (1, i, 0),\ \nu^2 = (1, -i, 0),\ \nu^3 = (0, 0, 1)$$

строим (теорема 2) базис автономных первых интегралов

$$W\colon x \to (x_1^2 + x_2^2)x_3^{-2}\exp\bigl(2\operatorname{arctg}(x_2 x_1^{-1})\bigr),\ \forall x\in\mathfrak{X}, \qquad (15)$$

на областях $\mathfrak{X}$ из множества $\{x\colon x_1\neq 0,\ x_3\neq 0\}$.

Теорема 3. *Пусть* $\nu^{\tau} = \overset{*}{\nu}{}^{\tau} + \widetilde{\nu}{}^{\tau}i,\ \nu^{s+\tau} = \overset{*}{\nu}{}^{\tau} - \widetilde{\nu}{}^{\tau}i,\ \tau=\overline{1,s}\,,$ $s\leqslant m/2,\ \nu^{2s+1} = \overset{*}{\nu}{}^{2s+1} + \widetilde{\nu}{}^{2s+1}\,i,$ *и* $\nu^{\theta},\ \theta=\overline{2s+2, m+1}\,,$ *— соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m}\,.$ *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы* (1.1) *будут функции*

$$W_1\colon x \to \prod_{k=1}^{s}\bigl(P_k(x)\bigr)^{\overset{*}{h}_k+\overset{*}{h}_{s+k}} \exp\bigl(-2\bigl(\widetilde{h}_k-\widetilde{h}_{s+k}\bigr)\varphi_k(x)\bigr)\cdot$$

$$\cdot\bigl(P_{2s+1}(x)\bigr)^{\overset{*}{h}_{2s+1}} \exp\bigl(-2\,\widetilde{h}_{2s+1}\,\varphi_{2s+1}(x)\bigr)\prod_{\theta=2s+2}^{m+1}\bigl(\nu^\theta x\bigr)^{2\overset{*}{h}_\theta},\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{16}$$

$$W_2\colon x \to \prod_{k=1}^{s}\bigl(P_k(x)\bigr)^{\widetilde{h}_k+\widetilde{h}_{s+k}} \exp\bigl(2\bigl(\overset{*}{h}_k-\overset{*}{h}_{s+k}\bigr)\varphi_k(x)\bigr)\cdot$$

$$\cdot\bigl(P_{2s+1}(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{2s+1}} \exp\bigl(2\,\overset{*}{h}_{2s+1}\,\varphi_{2s+1}(x)\bigr)\prod_{\theta=2s+2}^{m+1}\bigl(\nu^\theta x\bigr)^{2\widetilde{h}_\theta},\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{17}$$

где $\mathcal{X}$ *есть область из множества* $\mathrm{D}W_1\cap\mathrm{D}W_2$, *полиномы* $P_k\colon x\to\bigl(\overset{*}{\nu}{}^k x\bigr)^2+\bigl(\widetilde{\nu}^{\,k}x\bigr)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ k=\overline{1,s}\,,\ k=2s+1,$ *функции* $\varphi_k\colon x\to\operatorname{arctg}\Bigl(\widetilde{\nu}^{\,k}x\,\bigl(\overset{*}{\nu}{}^k x\bigr)^{-1}\Bigr),\ \forall x\in\mathcal{X},\ k=\overline{1,s}\,,\ k=2s+1,$ *а комплексные числа* $h_k=\overset{*}{h}_k+\widetilde{h}_k\,i,\ k=\overline{1,m+1}\,,$ *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы* $\sum\limits_{k=1}^{m+1}\lambda_k^j\,h_k=0,\ j=\overline{1,m}\,,$ *где* $\lambda_\tau^j=\overset{*}{\lambda}{}_\tau^j+\widetilde{\lambda}_\tau^j\,i,\ \lambda_{s+\tau}^j=\overset{*}{\lambda}{}_\tau^j-\widetilde{\lambda}_\tau^j\,i,$ $\tau=\overline{1,s}\,,\ \lambda_{2s+1}^j=\overset{*}{\lambda}{}_{2s+1}^j+\widetilde{\lambda}_{2s+1}^j\,i,$ *и* $\lambda_\theta^j,\ \theta=\overline{2s+2,m+1}\,,$ — *соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m}\,,$ *которым соответствуют общие собственные векторы* $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1}\,.$

Доказательство. Построим две функции

$$\overset{*}{W}\colon x\to\prod_{k=1}^{2s}\bigl(\nu^k x\bigr)^{h_k}\bigl(\nu^{2s+1}x\bigr)^{h_{2s+1}}\prod_{\theta=2s+2}^{m+1}\bigl(\nu^\theta x\bigr)^{h_\theta},\ \forall x\in\mathcal{X},$$

и

$$\overset{**}{W}\colon x \to \prod_{k=1}^{2s} \bigl(\nu^k x\bigr)^{l_k} \bigl(\overline{\nu^{2s+1}}\, x\bigr)^{l_{2s+1}} \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \bigl(\nu^\theta x\bigr)^{l_\theta}, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

где $h_k,\ l_k,\ k = \overline{1, m+1}\,,$ — некоторые комплексные числа. Функции $\overset{*}{W}$ и $\overset{**}{W}$ в общем случае представляют собой скалярные комплекснозначные функции вещественных аргументов.

С учётом леммы 1.1 и свойства 1, действие на $\mathcal{X}$ операторов:

$$\mathfrak{p}_j \overset{*}{W}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j\, h_k\, \overset{*}{W}(x),\ j = \overline{1, m}\,,$$

$$\mathfrak{p}_j \overset{**}{W}(x) = \Biggl(\sum_{k=1}^{2s} \lambda_k^j\, l_k + \overline{\lambda_{2s+1}^j}\; l_{2s+1} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+1} \lambda_\theta^j\, l_\theta\Biggr) \overset{**}{W}(x),\ j = \overline{1, m}\,,$$

Если совместна система $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j\, h_k = 0,\ j = \overline{1, m}\,,$ то функция $\overset{*}{W}$ будет первым интегралом системы (1.1).

Пусть $h_k = \overset{*}{h}_k + \widetilde{h}_k\, i,\ k = \overline{1, m+1}\,,$ — решение этой системы. Тогда решением системы

$$\sum_{k=1}^{2s} \lambda_k^j\, l_k + \overline{\lambda_{2s+1}^j}\; l_{2s+1} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+1} \lambda_\theta^j\, l_\theta = 0,\ j = \overline{1, m}\,,$$

будут числа

$$l_k = \overset{*}{h}_{s+k} - \widetilde{h}_{s+k}\, i,\ \ l_{s+k} = \overset{*}{h}_k - \widetilde{h}_k\, i,\ k = \overline{1, s}\,,$$

$$l_{2s+1} = \overset{*}{h}_{2s+1} - \widetilde{h}_{2s+1}\, i,\ \ l_\theta = \overset{*}{h}_\theta - \widetilde{h}_\theta\, i,\ \theta = \overline{2s+2, m+1}\,.$$

При этом функция $\overset{**}{W}$ будет первым интегралом вполне разрешимой дифференциальной системы (1.1).

Положив $W_1 = \overset{*}{W}\overset{**}{W}$ и $W_2 = \bigl(\overset{**}{W}/\overset{*}{W}\bigr)^i$, получим соответственно первые интегралы видов (16) и (17). ■

Пример 3. Для вполне разрешимой системы

$$\begin{aligned} &dx_1 = x_1\,dt_1 + x_3\,dt_2, \ \ dx_2 = -x_2\,dt_1 + x_4\,dt_2, \\ &dx_3 = x_3\,dt_1 - x_1\,dt_2, \ \ dx_4 = -x_4\,dt_1 - x_2\,dt_2 \end{aligned} \tag{18}$$

на основании собственных чисел

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = -1, \ \lambda_3^1 = \lambda_4^1 = 1; \ \ \lambda_1^2 = \lambda_3^2 = -i, \ \lambda_2^2 = \lambda_4^2 = i$$

и общих комплексных линейно независимых собственных векторов

$$\nu^1 = (0, -i, 0, 1), \ \nu^2 = (0, i, 0, 1), \ \nu^3 = (-i, 0, 1, 0), \ \nu^4 = (i, 0, 1, 0)$$

строим (теорема 3) базис автономных первых интегралов на пространстве $\mathbb{R}^4$, состоящий из скалярных функций

$$W_1\colon x \to x_1x_2 + x_3x_4 \quad \text{и} \quad W_2\colon x \to x_1x_4 - x_2x_3. \tag{19}$$

2.3. Случай кратных интегральных характеристических корней. Из системы (1.1) произвольным образом выделим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dx = A^{\zeta}(x)\,dt_{\zeta}\,, \tag{1.ζ}$$

где $A^{\zeta}(x) = \operatorname{colon}(a_{1\zeta}(x), \ldots, a_{n\zeta}(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$ со свойством: у матрицы A_{ζ} число элементарных делителей не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц $A_j, j = \overline{1, m}$. При этом характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1.ζ) является ζ-е уравнение характеристической системы (4.1), которое будем обозначать (4.ζ).

Определение 1. *Пусть* λ_l^{ζ} *— собственное число матрицы* A_{ζ}, *которому соответствует элементарный делитель кратности* s *и собственный вектор* ν^{0l}. *Вектор* ν^{kl}, *координатами которого являются решения системы уравнений*

$$\begin{gathered} \bigl(A_{\zeta} - \lambda_l^{\zeta} E\bigr)\operatorname{colon}\bigl(\nu_1^{kl}, \ldots, \nu_n^{kl}\bigr) = k\operatorname{colon}\bigl(\nu_1^{k-1,\,l}, \ldots, \nu_n^{k-1,\,l}\bigr), \\ k = \overline{1, s-1}\,, \end{gathered} \tag{20}$$

назовём ***k-м присоединённым вектором*** *матрицы* A_{ζ}, *соответствующим собственному числу* λ_l^{ζ}.

Теорема 4. *Пусть* ν^{0l} *и* $\nu^{\theta l}$, $\theta=\overline{1,s_l-1}$, $l=\overline{1,r}$, *— вещественные общие собственные векторы матриц* $A_j, j=\overline{1,m}$, *и присоединённые векторы матрицы* A_ζ, *которые соответствуют собственным числам* λ_l^ζ, $l=\overline{1,r}$, *имеющим элементарные делители кратности* s_l *при* $\sum\limits_{l=1}^{r} s_l \geqslant m+1$. *Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы* (1.1) *является скалярная функция*

$$W\colon x\to \prod_{\xi=1}^{k}\bigl(\nu^{0\xi}x\bigr)^{h_{0\xi}}\ \exp\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi}v_{q\xi}(x),\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{21}$$

где $\mathcal{X}$ *есть область из множества определения* $\mathrm{D}W$, *функции* $v_{q\xi}\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$, $q=\overline{1,\varepsilon_\xi}$, $\xi=\overline{1,k}$, *такие, что*

$$\nu^{i\xi}x=\sum_{q=1}^{i}\tbinom{i-1}{q-1}v_{q\xi}(x)\nu^{i-q,\,\xi}x,\ \forall x\in\mathcal{X},\ i=\overline{1,\varepsilon_\xi}\,,\ \xi=\overline{1,k}\,, \tag{22}$$

и $\sum\limits_{\xi=1}^{k}\varepsilon_\xi=m-k+1$, $\varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1$, $\xi=\overline{1,k}$, $k\leqslant r$. *При этом функции-решения* $v_{q\xi}$ *такие, что* $\mathfrak{p}_j v_{q\xi}(x)=\mu_{q\xi}^j$, $\forall x\in\mathcal{X}$, $\mu_{q\xi}^j=\mathrm{const}$, $q=\overline{1,\varepsilon_\xi}$, $\xi=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,m}$, *а числа* $h_{q\xi}$, $q=\overline{0,\varepsilon_\xi}$, $\xi=\overline{1,k}$, *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы* $\sum\limits_{\xi=1}^{k}\bigl(\lambda_\xi^j\,h_{0\xi}+\sum\limits_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\,h_{q\xi}\bigr)=0$, $j=\overline{1,m}$, *в которой* λ_ξ^j, $\xi=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,m}$, *суть вещественные собственные числа матриц* A_j, $j=\overline{1,m}$, *которым соответствуют собственные векторы* $\nu^{0\xi}$, $\xi=\overline{1,k}$.

Доказательство. На основании системы равенств (20) и леммы 1.1 устанавливаем, что

$$\mathfrak{p}_\zeta\bigl(\nu^{0l}x\bigr) = \lambda_l^\zeta\,\nu^{0l}x,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ l=\overline{1,r}\,,$$
$$\mathfrak{p}_\zeta\bigl(\nu^{\theta l}x\bigr) = \lambda_l^\zeta\,\nu^{\theta l}x+\theta\,\nu^{\theta-1,\,l}x,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \theta=\overline{1,s_l-1}\,,\ l=\overline{1,r}\,. \qquad (23)$$

Систему (22) при каждом фиксированном $\xi,\, \xi=\overline{1,k}\,,$ всегда можно разрешить относительно $v_{q\xi},$ так как её определитель равен $\bigl(\nu^{0\xi}x\bigr)^{\varepsilon_\xi}, \forall x\in\mathbb{R}^n,$ и отличен от тождественного нуля на области $\mathcal{X}$.

Докажем, что для функций v_{ql} справедливы тождества

$$\mathfrak{p}_\zeta v_{ql}(x) = \left[\begin{array}{l} 1,\ \forall x\in\mathcal{X},\ \ \text{при}\ \ q=1; \\ 0,\ \forall x\in\mathcal{X},\ \ \text{при}\ \ q=\overline{2,s_l-1}\,,\ l=\overline{1,r}\,. \end{array}\right. \qquad (24)$$

Соотношения (24) при $q=1$ и $q=2$ непосредственно проверяются на основании тождеств (23). Доказательство для случаев $q\geqslant 3$ проведём методом математической индукции. Предположим, что тождества (24) выполняются при $q=\overline{1,\varepsilon-1}\,.$

Вычислим производную Ли в силу уравнения $(1.\zeta)$ от функции $p\colon x\to\nu^{\varepsilon l}x, \forall x\in\mathbb{R}^n,$ с учётом соотношений (22), (23) и (24) при $q=\overline{1,\varepsilon-1}$:

$$\mathfrak{p}_\zeta\bigl(\nu^{\varepsilon l}x\bigr) = \lambda_l^\zeta\ \sum_{q=1}^{\varepsilon}\tbinom{\varepsilon-1}{q-1}v_{ql}(x)\nu^{\varepsilon-q,\,l}x +$$
$$+\,(\varepsilon-1)\ \sum_{q=1}^{\varepsilon-1}\tbinom{\varepsilon-2}{q-1}v_{ql}(x)\nu^{\varepsilon-q-1,\,l}x+\nu^{\varepsilon-1,\,l}x+\nu^{0l}x\,\mathfrak{p}_\zeta v_{\varepsilon l}(x),\ \forall x\in\mathcal{X}.$$

Отсюда, в силу соотношений (22) при $i=\varepsilon-1$ и $i=\varepsilon,$ соотношений (23) при $\theta=\varepsilon$ и того, что $\nu^{0l}x\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}^n,$ получаем, что

$$\mathfrak{p}_\zeta v_{\varepsilon l}(x)=0,\ \forall x\in\mathcal{X}.$$

Пусть

$$v_{0l}(x)=\ln\bigl(\nu^{0l}x\bigr),\ \forall x\in\mathcal{X},\ l=\overline{1,r}\,. \qquad (25)$$

Тогда из соотношений (23) и (24) получаем, что

$$\mathfrak{p}_{\zeta} v_{0l}(x) = \lambda_l^{\zeta},\ \forall x \in \mathcal{X},\ l = \overline{1, r}\,, \tag{26}$$

$$\mathfrak{p}_{\zeta} v_{1l}(x) = 1,\ \forall x \in \mathcal{X},\ l = \overline{1, r}\,, \tag{27}$$

$$\mathfrak{p}_{\zeta} v_{ql}(x) = 0,\ \forall x \in \mathcal{X},\ q = \overline{2, s_l - 1}\,,\ l = \overline{1, r}\,. \tag{28}$$

Перестановочные матрицы $A_j,\ j = \overline{1, m}\,,$ имеют r общих собственных векторов и выполняются соотношения

$$\mathfrak{p}_j v_{0l}(x) = \lambda_l^{j},\ \forall x \in \mathcal{X},\ l = \overline{1, r}\,,\ j = \overline{1, m}\,. \tag{29}$$

Учитывая, что скобки Пуассона линейных дифференциальных операторов первого порядка $\mathfrak{p}_j,\ j = \overline{1, m}\,,$ симметричны, из соотношений (27) и (28) получаем:

$$\begin{gathered} \mathfrak{p}_j v_{ql}(x) = \mu_{ql}^{j}\,, \forall x \in \mathcal{X}, \\ q = \overline{1, s_l - 1}\,,\ l = \overline{1, r}\,, j = \overline{1, m},\ \ j \neq \zeta. \end{gathered} \tag{30}$$

Следовательно, существует $\sum\limits_{l=1}^{r} s_l$ функций $v_{ql}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ q = \overline{0, s_l - 1},\ l = \overline{1, r},$ заданных соотношениями (22) и (25), относительно которых выполняются условия (24), (26) – (30) и которые, учитывая способ их построения, функционально независимы.

Построим функцию

$$\overset{*}{W}\colon x \to \sum_{\xi=1}^{k} \sum_{q=0}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi} v_{q\xi}(x),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

и вычислим действия линейных дифференциальных операторов на неё:

$$\mathfrak{p}_j \overset{*}{W}(x) = \sum_{\xi=1}^{k} \Bigl(\lambda_\xi^{j} h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^{j} h_{q\xi}\Bigr),\ \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1, m}\,.$$

Если $\sum\limits_{\xi=1}^{k}\bigl(\lambda_{\xi}^{j}\, h_{0\xi}+\sum\limits_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^{j}\, h_{q\xi}\bigr)=0,\ j=\overline{1,m}\,,$ то функция $\overset{*}{W}$ является первым интегралом на области $\mathcal{X}$ системы (1.1).

Полагая $W\colon x\to \exp \overset{*}{W}(x),\ \forall x\in\mathcal{X},$ получим первый интеграл вида (21) вполне разрешимой системы (1.1). ■

Пример 4. Для вполне разрешимой системы

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= x_2\, dt_1+(2x_1-x_3)\, dt_2,\\
dx_2 &= (2x_2-x_3-x_4)\, dt_1+(\,-x_1+2x_2+x_4)\, dt_2,\\
dx_3 &= (x_1-x_4)\, dt_1+(\,-x_1+3x_3+x_4)\, dt_2,\\
dx_4 &= (\,-x_1+2x_3+2x_4)\, dt_1+(x_2-3x_3+x_4)\, dt_2
\end{aligned}
\tag{31}
$$

по собственному числу $\lambda_1^1=1,$ которому соответствует элементарный делитель $(\lambda^1-1)^4,$ собственному $\nu^0=(-1,1,-1,0)$ и присоединённым $\nu^1=(1,0,\,-1,\,-1),\ \nu^2=(1,\,-1,3,0),\ \nu^3=(\,-3,0,9,9)$ векторам строим скалярные функции

$$v_1\colon x\to(x_1-x_3-x_4)(\,-x_1+x_2-x_3)^{-1},$$

$$v_2\colon x\to\bigl((-x_1+x_2-x_3)(x_1-x_2+3x_3)-(x_1-x_3-x_4)^2\bigr)(-x_1+x_2-x_3)^{-2},$$

$$
\begin{gathered}
v_3\colon x\to\bigl((-3x_1+9x_3+9x_4)(-x_1+x_2-x_3)^2-\\
-\,3(-x_1+x_2-x_3)(x_1-x_3-x_4)(x_1-x_2+3x_3)+\\
+\,2(x_1-x_3-x_4)^3\bigr)(\,-x_1+x_2-x_3)^{-3},\ \forall x\in\mathcal{X},
\end{gathered}
$$

где $\mathcal{X}$ — произвольная область из множества $\{x\colon x_1-x_2+x_3\neq 0\}.$

Тогда функции

$$W_1\colon x\to v_2(x),\ W_2\colon x\to(-x_1+x_2-x_3)^2\exp\bigl(-2v_1(x)-v_3(x)\bigr),\tag{32}$$

образуют базис первых интегралов системы (31) на областях $\mathcal{X}.$

Доказательство теоремы 4 предусматривает также и случай, когда матрицы $A_j,\ j=\overline{1,m}\,,$ имеют некоторое число общих комплексных собственных вектора $\nu^{0\,l},$ соответствующих собственным числам λ_l^{ζ} с элементарными делителями кратности $s_l.$ В данном случае на основании определённой группировки $m+1$

функций v_{ql}, $l=\overline{1,r}$, $q=\overline{0,s_l-1}$, всегда получим одну из двух возможностей.

1. В наборе из $m+1$ функций наряду с каждой комплекснозначной функцией вещественного аргумента содержится и комплексно сопряжённая.

2. В совокупности из $m+1$ функций имеется одна комплекснозначная функция вещественного аргумента, не имеющая комплексно сопряжённой.

В каждом из этих случаев дифференциальная система (1.1) будет иметь следующие первые интегралы.

В первом случае это — функция

$$W\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\Big(\big(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\big)^2+\big(\widetilde{\nu}^{\,0\xi}x\big)^2\Big)^{\overset{*}{h}_{0\xi}}\,\exp\Big(-2\,\widetilde{h}_{0\xi}\operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\nu}^{\,0\xi}x}{\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x}+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\big(\overset{*}{h}_{q\xi}\overset{*}{v}_{q\xi}(x)-\widetilde{h}_{q\xi}\widetilde{v}_{q\xi}(x)\big)\Big)\prod_{\theta=1}^{k_2}\big|\nu^{0\theta}x\big|^{h_{0\theta}}\,\exp\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}h_{q\theta}v_{q\theta}(x)$$

на области $\mathcal{X}$ из множества определения $\mathrm{D}W$, где вещественные числа $\overset{*}{h}_{q\xi}$, $\widetilde{h}_{q\xi}$ и $h_{q\theta}$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{k_1}2\Big(\big(\overset{*}{\lambda}{}^j_\xi\,\overset{*}{h}_{0\xi}-\widetilde{\lambda}{}^j_\xi\,\widetilde{h}_{0\xi}\big)+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\big(\overset{*}{\mu}{}^j_{q\xi}\,\overset{*}{h}_{q\xi}-\widetilde{\mu}{}^j_{q\xi}\,\widetilde{h}_{q\xi}\big)\Big)+$$

$$+\sum_{\theta=1}^{k_2}\Big(\lambda^j_\theta\,h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu^j_{q\theta}\,h_{q\theta}\Big)=0,\ j=\overline{1,m},$$

а $\lambda^j_\xi=\overset{*}{\lambda}{}^j_\xi+\widetilde{\lambda}{}^j_\xi\,i$, $\xi=\overline{1,k_1}$, и λ^j_θ, $\theta=\overline{1,k_2}$, — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi}=\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}+\widetilde{\nu}^{\,0\xi}\,i$, $\xi=\overline{1,k_1}$, и $\nu^{0\theta}$, $\theta=\overline{1,k_2}$. Числа $\overset{*}{\mu}{}^j_{q\xi}=\operatorname{Re}\mathfrak{p}_j v_{q\xi}(x)$,

$\widetilde{\mu}^{\,j}_{q\xi} = \operatorname{Im} \mathfrak{p}_j v_{q\xi}(x)$, $\mu^j_{q\theta} = \mathfrak{p}_j v_{q\theta}(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $q = \overline{1, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, $j = \overline{1, m}$. Функции $v_{q\xi} = \overset{*}{v}_{q\xi} + \widetilde{v}_{q\xi} i$ и v^θ_q находятся из системы (22), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство $2 \sum\limits_{\xi=1}^{k_1} \varepsilon_\xi + \sum\limits_{\theta=1}^{k_2} \varepsilon_\theta = m - 2k_1 - k_2 + 1$ при $2k_1 + k_2 \leqslant r$, $\varepsilon_\xi \leqslant s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\varepsilon_\theta \leqslant s_\theta - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов, а k_2 — количество вещественных общих собственных векторов матриц A_j, $j = \overline{1, m}$.

Пример 5. Система в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx_1 &= (3, -4, 4, 1, 0, 2)x\, dt_1 + (0, -4, 2, 1, -1, 1)x\, dt_2 + \\
&\quad + (-3, 2, -4, -3, 0, -2)x\, dt_3, \\
dx_2 &= (-1, 3, -3, 0, -2, -3)x\, dt_1 + (1, 3, 0, 0, 1, -1)x\, dt_2 + \\
&\quad + (2, -3, 3, 3, -1, 2)x\, dt_3, \\
dx_3 &= -(3, -5, 5, 1, 2, 4)x\, dt_1 - (0, -6, 2, 1, -2, 1)x\, dt_2 + \\
&\quad + (3, -3, 5, 4, 0, 2)x\, dt_3, \\
dx_4 &= (3, -6, 4, 4, -1, 5)x\, dt_1 + (2, -6, 2, 3, -4, 2)x\, dt_2 \\
&\quad - (3, -2, 6, 4, 1, 1)x\, dt_3, \\
dx_5 &= (5, -5, 8, 3, 3, 6)x\, dt_1 + (1, -6, 3, 2, -2, 2)x\, dt_2 - \\
&\quad - (3, -3, 6, 4, 1, 2)x\, dt_3, \\
dx_6 &= -(2, -5, 4, 3, -1, 2)x\, dt_1 - (2, -4, 3, 3, -2, 2)x\, dt_2 + \\
&\quad + (2, -1, 4, 2, 1, 0)x\, dt_3
\end{aligned} \tag{33}$$

является вполне разрешимой.

Комплексному собственному числу $\lambda^1_1 = 1 + 2i$ соответствует элементарный делитель $(\lambda^1 - 1 - 2i)^3$ кратности три, а также собственный вектор $\nu^0 = (1, 0, 1 + i, 1, i, 1)$, первый и второй присоединённые векторы $\nu^1 = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$ и $\nu^2 = (2 + 2i, 0, 2 + 2i, 0, 2i, 2i)$.

По ним составляем скалярные функции

$$\overset{*}{v}_1\colon x \to \big((x_1+x_2)(x_1+x_3+x_4+x_6)+(x_3+x_5)(x_2+x_5+x_6)\big)P^{-1}(x),$$

$$\widetilde{v}_1\colon x \to \big((x_1+x_3+x_4+x_6)(x_2+x_5+x_6)-(x_1+x_2)(x_3+x_5)\big)P^{-1}(x),$$

$$\overset{*}{v}_2\colon x \to \Big(\big((x_1+x_3+x_4+x_6)(x_2+x_5+x_6)-(x_1+x_2)(x_3+x_5)\big)^2+$$

$$+\,2P(x)\big((x_1+x_3)(x_1+x_3+x_4+x_6)+(x_3+x_5)(x_1+x_3+x_5+x_6)\big)-$$

$$-\,\big((x_1+x_2)(x_1+x_3+x_4+x_6)\,+\,(x_3+x_5)(x_2+x_5+x_6)\big)^2\Big)P^{-2}(x),$$

$$\widetilde{v}_2\colon x \to 2\big(P(x)\big((x_1+x_3+x_4+x_6)(x_1+x_3+x_5+x_6)-$$

$$-\,(x_1+x_3)(x_3+x_5)\big)+\big((x_3+x_5)(x_1+x_2)-$$

$$-\,(x_1+x_3+x_4+x_6)(x_2+x_5+x_6)\big)\cdot$$

$$\cdot\big((x_1+x_2)(x_1+x_3+x_4+x_6)+(x_3+x_5)(x_2+x_5+x_6)\big)\big)P^{-2}(x),\ \forall x\in\mathcal{X},$$

где $P\colon x \to (x_1+x_3+x_4+x_6)^2+(x_3+x_5)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^6.$

Тогда скалярные функции

$$W_1\colon x \to P(x)\exp\big(-4\varphi(x)+6\overset{*}{v}_1(x)+2\widetilde{v}_1(x)\big),\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{34}$$

$$W_2\colon x \to P^2(x)\exp\big(-2\varphi(x)+\overset{*}{v}_2(x)-\widetilde{v}_2(x)\big),\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{35}$$

и

$$W_3\colon x \to 2\widetilde{v}_1(x)-2\overset{*}{v}_2(x)-\widetilde{v}_2(x),\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{36}$$

где $\varphi\colon x \to \operatorname{arctg}\big((x_3+x_5)(x_1+x_3+x_4+x_6)^{-1}\big),\ \forall x\in\mathcal{X},$ образуют базис автономных первых интегралов на областях $\mathcal{X},$ содержащихся в множестве $\{x\colon x_1+x_3+x_4+x_6\neq 0\}$.

Во втором случае будем различать две возможности.

Случай а. Общий собственный вектор матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$, не имеет комплексно сопряжённого вектора.

Тогда система (1.1) имеет первые интегралы:

$$W_1\colon x \to \prod_{\xi=1}^{k_1}\big(P_\xi(x)\big)^{\overset{*}{h}_{0\xi}+\overset{*}{h}_{0,(k_1+\xi)}}\ \exp\Big(-2\big(\widetilde{h}_{0\xi}-\widetilde{h}_{0,(k_1+\xi)}\big)\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\Big(\big(\overset{*}{h}_{q\xi}+\overset{*}{h}_{q,(k_1+\xi)}\big)\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\big(\widetilde{h}_{q,(k_1+\xi)}-\widetilde{h}_{q\xi}\big)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Big)\Big)\cdot$$

$$\cdot\big(P_{2k_1+1}(x)\big)^{\overset{*}{h}_{0,(2k_1+1)}}\exp\big(-2\widetilde{h}_{0,(2k_1+1)}\,\varphi_{2k_1+1}(x)\big)\cdot$$

$$\cdot\prod_{\theta=1}^{k_2}\big(\nu^{0\theta}x\big)^{2\overset{*}{h}_{0\theta}}\exp\Big(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\overset{*}{h}_{q\theta}\,v_{q\theta}(x)\Big),\ \forall x\in\mathcal{X},$$

и

$$W_2\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\big(P_\xi(x)\big)^{\widetilde{h}_{0\xi}+\widetilde{h}_{0,(k_1+\xi)}}\exp\Big(2\big(\overset{*}{h}_{0\xi}-\overset{*}{h}_{0,(k_1+\xi)}\big)\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\Big(\big(\widetilde{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{q,(k_1+\xi)}\big)\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\big(\overset{*}{h}_{q\xi}-\overset{*}{h}_{q,(k_1+\xi)}\big)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Big)\Big)\cdot$$

$$\cdot\big(P_{2k_1+1}(x)\big)^{\widetilde{h}_{0,(2k_1+1)}}\exp\big(2\overset{*}{h}_{0,(2k_1+1)}\,\varphi_{2k_1+1}(x)\big)\cdot$$

$$\cdot\prod_{\theta=1}^{k_2}\big(\nu^{0\theta}x\big)^{2\widetilde{h}_{0\theta}}\exp\Big(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\widetilde{h}_{q\theta}\,v_{q\theta}(x)\Big),\ \forall x\in\mathcal{X},\ \mathcal{X}\subset \mathrm{D}W_1\cap\mathrm{D}W_2,$$

где полиномы $P_\xi\colon x\to\big(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\big)^2+\big(\widetilde{\nu}{}^{0\xi}x\big)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^n$, функции $\varphi_\xi\colon x\to \operatorname{arctg}\Big(\widetilde{\nu}{}^{0\xi}x\,\big(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\big)^{-1}\Big),\ \forall x\in\mathcal{X},\ \xi=\overline{1,k_1}\,,\ \xi=2k_1+1.$ Числа $h_{q\xi}=\overset{*}{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{q\xi}\,i,\ h_{q\theta}=\overset{*}{h}_{q\theta}+\widetilde{h}_{q\theta}\,i,\ q=\overline{0,\varepsilon_k}\,,\ k=\xi$ или $k=\theta,\ \xi=\overline{1,2k_1+1}\,,\ \theta=\overline{1,k_2}\,,$ составляют нетривиальное решение линейной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1}\Big(\lambda_\xi^j\,h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\,h_{q\xi}\Big)+\lambda_{2k_1+1}^j\,h_{0,(2k_1+1)}+$$

$$+\sum_{\theta=1}^{k_2}\Bigl(\lambda_\theta^j h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j h_{q\theta}\Bigr)=0,\ j=\overline{1,m}\,,$$

где $\lambda_\xi^j=\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j+\widetilde{\lambda}_\xi^j\,i,\ \lambda_{k_1+\xi}^j=\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j-\widetilde{\lambda}_\xi^j\,i,\ \lambda_{2k_1+1}^j=\overset{*}{\lambda}{}_{2k_1+1}^j+\widetilde{\lambda}_{2k_1+1}^j\,i,$ $\xi=\overline{1,k_1}\,,$ и $\lambda_\theta^j,\theta=\overline{1,k_2}\,,$ — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}\,,$ которым соответствуют комплексные $\nu^{0\xi}=\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}+\widetilde{\nu}^{\,0\xi}\,i,\ \nu^{0,(k_1+\xi)}=\overline{\nu^{0\xi}}\,,$ $\xi=\overline{1,k_1}\,,\ \nu^{0,(2k_1+1)}=\overset{*}{\nu}{}^{0,(2k_1+1)}+\widetilde{\nu}^{\,0,(2k_1+1)}\,i$ и вещественные $\nu^{0\theta},$ $\theta=\overline{1,k_2}\,,$ собственные векторы, а $\mu_{q\xi}^j=\mathfrak{p}_j v_{q\xi}(x),\ \overset{*}{\mu}{}_{q\xi}^j=\operatorname{Re}\mu_{q\xi}^j,$ $\widetilde{\mu}_{q\xi}^j=\operatorname{Im}\mu_{q\xi}^j,\ \mu_{q\theta}^j=\mathfrak{p}_j v_{q\theta}(x),\ \forall x\in\mathfrak{X},$ при $q=\overline{1,\varepsilon_k}\,,\ k=\xi$ или $k=\theta,\ \xi=\overline{1,2k_1}\,,\ \theta=\overline{1,k_2}\,,\ j=\overline{1,m}\,.$ Функции $v_{q\xi}=\overset{*}{v}_{q\xi}+\widetilde{v}_{q\xi}\,i$ и $v_{q\theta},\ q=\overline{1,\varepsilon_k}\,,\ k=\xi$ или $k=\theta,\ \xi=\overline{1,k_1}\,,\ \theta=\overline{1,k_2}\,,$ находятся из системы (22), а числа ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство $2\sum\limits_{\xi=1}^{k_1}\varepsilon_\xi+\sum\limits_{\theta=1}^{k_2}\varepsilon_\theta=m-2k_1-k_2$ при $2k_1+1+k_2\leqslant r,\ \varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1,\ \xi=\overline{1,k_1}\,,\ \varepsilon_\theta\leqslant s_\theta-1,\ \theta=\overline{1,k_2}\,,$ где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых собственных векторов, а k_2 — количество вещественных собственных векторов матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}\,.$

Пример 6. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx_1&=(1,-2,2,0,1,1)x\,dt_1+(0,2,0,0,1,1)x\,dt_2+\\
&\qquad+(3,0,0,0,-1,-1)x\,dt_3+(1,-2,4,0,2,2)x\,dt_4,\\
dx_2&=(0,2,-2,0,-2,-2)x\,dt_1-(1,3,0,0,1,1)x\,dt_2+\\
&\qquad+(-1,2,0,0,1,1)x\,dt_3-(2,1,4,0,4,4)x\,dt_4,\\
dx_3&=(0,3,-2,0,-2,-2)x\,dt_1-(1,3,1,0,2,2)x\,dt_2+\\
&\qquad+(-2,-1,2,0,1,1)x\,dt_3-(3,-2,7,0,5,5)x\,dt_4,
\end{aligned}$$

$$dx_4 = (0,-4,0,2,-2,2)x\,dt_1 + (2,2,0,1,0,4)x\,dt_2 + \\ + (1,2,-2,1,-1,-1)x\,dt_3 + (3,-4,10,2,7,7)x\,dt_4, \tag{37}$$

$$dx_5 = (2,-3,4,2,2,4)x\,dt_1 + (3,3,2,2,1,4)x\,dt_2 + \\ + (2,1,-1,0,0,-1)x\,dt_3 + (3,-2,9,0,7,5)x\,dt_4,$$

$$dx_6 = (-1,3,-2,-2,1,-1)x\,dt_1 - (2,1,2,2,1,4)x\,dt_2 + \\ + (-1,-1,1,0,1,2)x\,dt_3 + (1,4,-5,0,-4,-2)x\,dt_4$$

вполне разрешима.

На основании собственных чисел $\lambda_2^1 = \lambda_1^1 = 1+i,\ \lambda_5^1 = 2i,$ которым соответствуют элементарные делители $(\lambda^1-1-i)^2$ и $\lambda^1-2i,$ собственных $\nu^{01} = (1,1+i,0,0,i,i),\ \nu^{02} = (1,0,1+i,1,i,1)$ и присоединённого $\nu^{11} = (1+i,0,1+i,0,i,i)$ векторов, строим на области $\mathcal{X}$ функции

$$\overset{*}{v}_1\colon x \to \big((x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_5+x_6)(x_1+x_3+x_5+x_6)\big)P_1^{-1}(x),$$

$$\widetilde{v}_1\colon x \to \big((x_1+x_2)(x_1+x_3+x_5+x_6)-(x_1+x_3)(x_2+x_5+x_6)\big)P_1^{-1}(x),$$

где $P_1\colon x \to (x_1+x_2)^2+(x_2+x_5+x_6)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^6.$

Автономный интегральный базис на области $\mathcal{X}$ системы (37) образуют скалярные функции

$$W_1\colon x \to P_1(x)P_2^2(x)\exp\big(-10\varphi_1(x)+8\overset{*}{v}_1(x)+6\widetilde{v}_1(x)\big), \tag{38}$$

и

$$W_2\colon x \to P_1^3(x)\,\exp\big(-10\varphi_1(x)-4\varphi_2(x)+12\overset{*}{v}_1(x)+14\widetilde{v}_1(x)\big), \tag{39}$$

где $\mathcal{X}\subset\big\{x\colon x_1+x_2\neq 0,\ x_1+x_3+x_4+x_6\neq 0\big\},$ полином

$$P_2\colon x \to (x_1+x_3+x_4+x_6)^2+(x_3+x_5)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^6,$$

скалярные функции

$$\varphi_1\colon x \to \operatorname{arctg}\frac{x_2+x_5+x_6}{x_1+x_2},\ \varphi_2\colon x \to \operatorname{arctg}\frac{x_3+x_5}{x_1+x_3+x_4+x_6},\ \forall x\in\mathcal{X}.$$

Случай б. Функция $v_{l\gamma},\ \gamma\in\{1,\ldots,k_1\},\ l\in\{1,\ldots,\varepsilon_\gamma\},$ не имеет комлексно сопряжённой функции.

Тогда у системы (1.1) существуют первые интегралы

$$W_1\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\big(P_\xi(x)\big)^{\overset{*}{h}_{0\xi}+\overset{*}{h}_{0,(k_1+\xi)}}\ \exp\Big(-2\big(\widetilde{h}_{0\xi}-\widetilde{h}_{0,(k_1+\xi)}\big)\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2(1-\delta_{ql}\delta_{\xi\gamma})\Big(\big(\overset{*}{h}_{q\xi}+\overset{*}{h}_{q,(k_1+\xi)}\big)\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\big(\widetilde{h}_{q,(k_1+\xi)}-\widetilde{h}_{q\xi}\big)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Big)+$$

$$+\,2\big(\overset{*}{h}_{l\gamma}\overset{*}{v}_{l\gamma}(x)-\widetilde{h}_{l\gamma}\widetilde{v}_{l\gamma}(x)\big)\Big)\ \prod_{\theta=1}^{k_2}\big(\nu^{0\theta}x\big)^{2\overset{*}{h}_{0\theta}}\ \exp\Big(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\overset{*}{h}_{q\theta}\,v_{q\theta}(x)\Big),$$

и

$$W_2\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\big(P_\xi(x)\big)^{\widetilde{h}_{0\xi}+\widetilde{h}_{0,(k_1+\xi)}}\ \exp\Big(2\big(\overset{*}{h}_{0\xi}-\overset{*}{h}_{0,(k_1+\xi)}\big)\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2(1-\delta_{ql}\delta_{\xi\gamma})\Big(\big(\widetilde{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{q,(k_1+\xi)}\big)\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\big(\overset{*}{h}_{q\xi}-\overset{*}{h}_{q,(k_1+\xi)}\big)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Big)+$$

$$+\,2\big(\overset{*}{h}_{l\gamma}\widetilde{v}_{l\gamma}(x)-\widetilde{h}_{l\gamma}\overset{*}{v}_{l\gamma}(x)\big)\Big)\ \prod_{\theta=1}^{k_2}\big(\nu^{0\theta}x\big)^{2\widetilde{h}_{0\theta}}\ \exp\Big(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\widetilde{h}_{q\theta}\,v_{q\theta}(x)\Big)$$

на области $\mathcal{X}$ из множества $\mathrm{D}W_1\cap\mathrm{D}W_2$, где на $\mathbb{R}^n$ полиномы $P_\xi\colon x\to\big(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\big)^2+\big(\widetilde{\nu}^{\,0\xi}x\big)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \xi=\overline{1,k_1}\,,$ скалярные функции $\varphi_\xi\colon x\to\operatorname{arctg}\Big(\widetilde{\nu}^{\,0\xi}x\,\big(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\big)^{-1}\Big),\ \forall x\in\mathcal{X},\ \xi=\overline{1,k_1}\,.$ Числа $h_{q\xi}=\overset{*}{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{q\xi}\,i,\ h_{q\theta}=\overset{*}{h}_{q\theta}+\widetilde{h}_{q\theta}\,i,\ q=\overline{0,\varepsilon_k}\,,\ k=\xi$ или $k=\theta,\ \xi=\overline{1,2k_1}\,,\ \theta=\overline{1,k_2}\,,$ составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1}\Bigl(\lambda_\xi^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi}\Bigr) - \mu_{l,(k_1+\gamma)}^j h_{l,(k_1+\gamma)} +$$

$$+ \sum_{\theta=1}^{k_2}\Bigl(\lambda_\theta^j h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_{q\theta}^j h_{q\theta}\Bigr) = 0,\ j=\overline{1,m}\,,$$

где $\lambda_\xi^j = \overset{*}{\lambda}{}_\xi^j + \widetilde{\lambda}_\xi^j\, i,\ \lambda_{k_1+\xi}^j = \overline{\lambda_\xi^j}\,,\ \xi=\overline{1,k_1}\,,$ и $\lambda_\theta^j,\ \theta=\overline{1,k_2}\,,$ есть соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}\,,$ которым соответствуют комплексные $\nu^{0\xi} = \overset{*}{\nu}{}^{0\xi} + \widetilde{\nu}^{\,0\xi}\, i,\ \nu^{0,(k_1+\xi)} = \overline{\nu^{0\xi}}\,,\ \xi=\overline{1,k_1}\,,$ и вещественные $\nu^{0\theta},\ \theta=\overline{1,k_2}\,,$ собственные векторы, а числа $\mu_{q\xi}^j = \mathfrak{p}_j v_{q\xi}(x)$, $\overset{*}{\mu}{}_{q\xi}^j = \operatorname{Re}\mu_{q\xi}^j,\ \widetilde{\mu}_{q\xi}^j = \operatorname{Im}\mu_{q\xi}^j,\ \mu_{q\theta}^j = \mathfrak{p}_j v_{q\theta}(x)$ при $q=\overline{1,\varepsilon_k}\,,\ k=\xi$ или $k=\theta,\ \xi=\overline{1,2k_1}\,,\ \theta=\overline{1,k_2}\,,\ j=\overline{1,m}\,.$ Функции $v_{q\xi} = \overset{*}{v}_{q\xi} + \widetilde{v}_{q\xi}\, i$ и $v_{q\theta},\ q=\overline{1,\varepsilon_k}\,,\ k=\xi$ или $k=\theta,\ \xi=\overline{1,k_1}\,,\ \theta = \overline{1,k_2}\,,$ находятся из системы (22), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство $2\sum\limits_{\xi=1}^{k_1}\varepsilon_\xi + \sum\limits_{\theta=1}^{k_2}\varepsilon_\theta = m-2k_1-k_2+2$ при $2k_1+k_2\leqslant r,\ \varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1,\ \xi=\overline{1,k_1}\,,\ \varepsilon_\theta\leqslant s_\theta-1,\ \theta=\overline{1,k_2}\,,$ где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов, а k_2 — количество общих вещественных собственных векторов матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}\,.$

Пример 7. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx_1 &= (3,-4,4,1,0,2)x\,dt_1 + (0,-4,2,1,-1,1)x\,dt_2,\\
dx_2 &= (-1,3,-3,0,-2,-3)x\,dt_1 + (1,3,0,0,1,-1)x\,dt_2,\\
dx_3 &= (-3,5,-5,-1,-2,-4)x\,dt_1 + (0,6,-2,-1,2,-1)x\,dt_2,\\
dx_4 &= (3,-6,4,4,-1,5,)x\,dt_1 + (2,-6,2,3,-4,2)x\,dt_2,\\
dx_5 &= (5,-5,8,3,3,6)x\,dt_1 + (1,-6,3,2,-2,2)x\,dt_2,\\
dx_6 &= (-2,5,-4,-3,1,-2)x\,dt_1 + (-2,4,-3,-3,2,-2)x\,dt_2
\end{aligned}\qquad(40)$$

является вполне разрешимой.

На основании собственного числа $\lambda_1^1 = 1 + 2i$, которому соответствует элементарный делитель $(\lambda^1 - 1 - 2i)^3$ кратности три, собственного вектора $\nu^0 = (1, 0, 1+i, 1, i, 1)$ и присоединённых векторов $\nu^1 = (1, 1+i, 0, 0, i, i)$, $\nu^2 = (2+2i, 0, 2+2i, 0, 2i, 2i)$ строим скалярные функции

$$W_1 \colon x \to P(x) \exp\big(-\varphi(x) - \widetilde{v}_1(x)\big),\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{41}$$

$$W_2 \colon x \to P(x) \exp\big(-2\varphi(x) + 2\overset{*}{v}_1(x)\big),\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{42}$$

$$W_3 \colon x \to P^2(x) \exp\big(-2\varphi(x) - \widetilde{v}_2(x)\big),\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{43}$$

и

$$W_4 \colon x \to \overset{*}{v}_2(x),\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{44}$$

где функции P, φ, $\widetilde{v}_1$, $\overset{*}{v}_1$, $\widetilde{v}_2$ и $\overset{*}{v}_2$ такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен интегральный базис системы (33).

Эти скалярные функции, будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{x \colon x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$.

3. Неавтономные первые интегралы

Построение неавтономных первых интегралов на основании автономных первых интегралов.

Система (1.1) индуцирует линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{P}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \mathfrak{p}_j(x),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{n+m},\ j = \overline{1,m}\,,$$

которые назовём операторами дифференцирования в силу системы (1.1), а их действие — производными Ли в силу системы (1.1).

С целью построения базиса первых интегралов дифференциальной системы (1.1) (размерность которого n) достаточно к автономному интегральному базису (размерность которого $n-m$) этой системы добавить m неавтономных первых интегралов системы (1.1), таких, что полученная совокупность n первых интегралов будет функционально независимой на некоторой области $\mathcal{D}$ из пространства $\mathbb{R}^{m+n}$.

Такая процедура всякий раз может быть осуществлена на основании следующих закономерностей.

Теорема 1. *Пусть* ν *— общий вещественный собственный вектор матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m}$. *Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы* (1.1) *является функция*

$$W\colon (t,x)\to(\nu x)\exp\Big(-\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\,t_j\Big),\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^{n+m}, \qquad (1)$$

где λ^j *— вещественные собственные числа матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m}$, *которым соответствует собственный вектор* ν.

Доказательство. Действительно, с учётом леммы 1.1 производные Ли в силу системы (1.1) функции (1) на $\mathbb{R}^{n+m}$ равны

$$\mathfrak{P}_jW(t,x)=\partial_{t_j}W(t,x)+\mathfrak{p}_jW(t,x)=$$

$$=\big(-\lambda^j+\lambda^j\big)W(t,x)=0,\ j=\overline{1,m}\,.\ \blacksquare$$

Пример 1 (продолжение примера 1.2). На основании собсвенных чисел $\lambda_1^1=-2,\ \lambda_1^2=1$ и $\lambda_2^1=0,\ \lambda_2^2=-1$, и соответствующих им собстевенных векторов $\nu^1=(0,-1,1,1)$ и $\nu^2=(1,0,0,0)$ по теореме 1 строим первые интегралы

$$W_1\colon (t,x)\to(-x_2+x_3+x_4)\exp(2t_1-t_2),\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^6,$$

и

$$W_2\colon (t,x)\to x_1\exp t_2,\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^6,$$

системы (3.2).

Скалярные функции (4.2), (5.2), W_1 и W_2, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (3.2) на областях $\mathbb{R}^2\times\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ есть область из $\{x\colon x_1\neq 0\}$.

Следствие 1. *Пусть* $\nu=\overset{*}{\nu}+\widetilde{\nu}\,i$ *— общий комплексный собственный вектор матриц* $A_j,\ j=\overline{1,m}$. *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой дифференциальной системы* (1.1) *являются скалярные функции*

$$W_1\colon (t,x)\to\Big(\big(\overset{*}{\nu}x\big)^2+\big(\widetilde{\nu}x\big)^2\Big)\exp\Big(-\sum_{j=1}^{m}2\,\overset{*}{\lambda}{}^j\,t_j\Big),\forall (t,x)\in\mathbb{R}^{n+m},$$

и

$$W_2\colon (t,x) \to \operatorname{arctg} \frac{\widetilde{\nu} x}{\overset{*}{\nu}\, x} - \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\lambda}^j\, t_j,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

где $\lambda^j = \overset{*}{\lambda}{}^j + \widetilde{\lambda}{}^j\, i$ *— собственные числа матриц* $A_j,\ j = \overline{1,m}$*, которым соответствует собственный вектор* ν*.*

Пример 2 (продолжение примера 2.2). На основании собственных чисел $\lambda_1^1 = 1$ и $\lambda_1^2 = -i$, и соответствующего им общего комплексного собственного вектора $\nu^1 = (1, i, 0)$, строим первые интегралы вполне разрешимой системы (14.2):

$$W_1\colon (t,x) \to (x_1^2 + x_2^2)\exp(-2t_1),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^5,$$

и

$$W_2\colon (t,x) \to \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}.$$

Функции (15.2), W_1 и W_2, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (14.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ есть область из множества $\{x\colon x_1 \neq 0,\ x_3 \neq 0\}$.

Пример 3 (продолжение примера 3.2). На основании собственных чисел $\lambda_1^1 = -1$ и $\lambda_1^2 = -i$, и соответствующего им общего комплексного собственного вектора $\nu^1 = (0, -i, 0, 1)$, строим (следствие 1) первые интегралы вполне разрешимой системы (18.2):

$$W_3\colon (t,x) \to (x_2^2 + x_4^2)\exp(2t_1),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^6,$$

и

$$W_4\colon (t,x) \to \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_4} - t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}.$$

Функции (19.2), W_3 и W_4, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов дифференциальной системы (18.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ есть область из множества $\{x\colon x_4 \neq 0\}$.

Теорема 2. *Пусть* ν^0 *и* $\nu^\theta,\ \theta = \overline{1, s-1}$*, — общий вещественный собственный вектор матриц* $A_j,\ j = \overline{1,m}$*, и присоединённые векторы матрицы* A_ζ*, которые соответствуют собственному числу* λ^ζ*, имеющему элементарный делитель кратности* $s \geqslant 2$*. Тогда первыми интегралами вполне* *разрешимой системы* (1.1) *являются функции*

$$W_q\colon (t,x) \to v_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^{m} \mu_{q\zeta}^{j}\, t_j\,,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ q = \overline{1, s-1}\,, \qquad (2)$$

где функции $v_{q\zeta}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *находятся из системы* (22.2), *а числа* $\mu_{q\zeta}^{j} = \mathfrak{p}_j v_{q\zeta}(x) = \mathrm{const},\ \forall x \in \mathcal{X},\ q = \overline{1, s-1}\,,\ j = \overline{1, m}\,.$

Доказательство. Составим функции

$$W_q\colon (t,x) \to\ v_{q\zeta}(x)\ - \sum_{i=1}^{m} \mu_{q\zeta}^{i}\, t_i\,,\ \forall (t,x) \in \mathcal{D},\ q = \overline{1, s-1}\,,$$

где $\mu_{q\zeta}^{i},\ q = \overline{1, s-1}\,,\ i = \overline{1, m}\,,$ — вещественные числа.

Производные Ли этих функций в силу системы (1.1)

$$\mathfrak{P}_j W_q(t,x) = \partial_{t_j} W_q(t,x) + \mathfrak{p}_j W_q(t,x) =\ -\mu_q^{\zeta j} + \mathfrak{p}_j v_q^{\zeta}(x),$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X},\ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}\,,\ q = \overline{1, s-1}\,.$$

Учитывая, что

$$\mathfrak{p}_j v_{q\zeta}(x) = \mu_{q\zeta}^{j},\ \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1, m}\,,\ q = \overline{1, s-1}\,,$$

получаем, что функции (2) являются первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.1). ■

Пример 4 (продолжение примера 4.2). По теореме 2, учитывая, что

$$\mathfrak{p}_1 v_1(x) = 1,\ \mathfrak{p}_1 v_3(x) = 0,\ \mathfrak{p}_2 v_1(x) =\ -1,\ \mathfrak{p}_2 v_3(x) = 6,$$

строим первые интегралы системы (31.2):

$$W_3\colon (t,x) \to v_1(x) - t_1 + t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

и

$$W_4\colon (t,x) \to v_3(x) - 6t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

где функции v_1 и v_2 такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный базис системы (31.2), а $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon x_1 - x_2 + x_3 \neq 0\}$.

Скалярнные функции (32.2), W_3 и W_4, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (31.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

Следствие 2. *Пусть* ν^0 *и* $\nu^\theta, \theta = \overline{1, s-1}\,,$ *— общий комплексный собственный вектор матриц* $A_j, \, j = \overline{1,m}\,,$ *и присоединённые векторы матрицы* A_ζ, *которые соответствуют существенно комплексному собственному числу* λ^ζ, *имеющему элементарный делитель кратности* $s \geqslant 2$. *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы* (1.1) *являются скалярные функции*

$$W_{1q}\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\mu}{}^{j}_{q\zeta}\, t_j\,, \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}, \ q = \overline{1, s-1}\,,$$

и

$$W_{2q}\colon (t,x) \to \widetilde{v}_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\mu}^{j}_{q\zeta}\, t_j\,, \ \ \forall (t,x) \in \mathcal{D}, \ q = \overline{1, s-1}\,,$$

где функции $v_{q\zeta}\colon x \to \overset{*}{v}_{q\zeta}(x) + \widetilde{v}_{q\zeta}(x)\, i, \, \forall x \in \mathcal{X}, \, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, *находятся из системы* (22.2), *вещественные числа* $\overset{*}{\mu}{}^{j}_{q\zeta} = \mathfrak{p}_j \overset{*}{v}_{q\zeta}(x)$, $\widetilde{\mu}^{j}_{q\zeta} = \mathfrak{p}_j \widetilde{v}_{q\zeta}(x), \, \forall x \in \mathcal{X}, \, j = \overline{1,m}\,, \, q = \overline{1, s-1}\,.$

Пример 5 (продолжение примера 5.2). Для вполне разрешимой дифференциальной системы (33.2) на основании следствия 2 строим первые интегралы

$$W_{11}\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_1(x) - t_1 - t_2, \quad W_{21}\colon (t,x) \to \widetilde{v}_1(x) + t_2 - t_3$$

и

$$W_{12}\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_2(x) - 2t_3, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{X},$$

где функции $\overset{*}{v}_1, \, \widetilde{v}_1$ и $\overset{*}{v}_2$ такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный базис системы (33.2), а $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$.

Скалярные функции (34.2) − (36.2), W_{11}, W_{21} и W_{12}, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (33.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

Пример 6 (продолжение примера 6.2). Для вполне разрешимой дифференциальной системы (37.2) на основании общего комплексного собственного вектора $\nu^{01} = (1, 1+i, 0, 0, i, i)$, соответствующего собственным числам $\lambda_1^1 = 1+i$, $\lambda_1^2 = -1$, $\lambda_1^3 = 2$ и $\lambda_1^4 = -1+2i$ строим (следствие 1) первые интегралы

$$W_3\colon (t,x) \to \big((x_1+x_2)^2 + (x_2+x_5+x_6)^2\big)\exp(-2t_1+2t_2-4t_3+2t_4),$$

$$W_4\colon (t,x) \to \operatorname{arctg}\frac{x_2+x_5+x_6}{x_1+x_2} - t_1 - 2t_4,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ есть область из множества $\{x\colon x_1+x_2 \neq 0,\ x_1+x_3+x_4+x_6 \neq 0\}$.

По следствию 2 строим первые интегралы

$$W_5\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_1(x) - t_1 + t_3 - t_4,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{X},$$

$$W_6\colon (t,x) \to \widetilde{v}_1(x) - t_2 - t_4,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{X},$$

где функции $\overset{*}{v}_1$ и $\widetilde{v}_1$ такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный базис системы (37.2).

Скалярнные функции (38.2), (39.2), $W_3, \ldots, W_6$, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (37.2) на областях $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{X}$.

Пример 7 (продолжение примера 7.2). Для вполне разрешимой системы (40.2) по следствию 2 строим первые интегралы

$$W_5\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_1(x) - t_1 - t_2,$$

и

$$W_6\colon (t,x) \to \widetilde{v}_1(x) + t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

где функции $\overset{*}{v}_1$ и $\widetilde{v}_1$ такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный базис системы (33.2), а $\mathcal{X}$ есть область из множества $\{x\colon x_1+x_3+x_4+x_6 \neq 0\}$.

Скалярнные функции (41.2) $-$ (44.2), W_5 и W_6, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (40.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

Глава III

КОМПАКТНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

С целью однозначного толкования используемых понятий оговорим следующие положения.

Если функция $\omega\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ такова, что

$$\omega(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathcal{X}, \quad \text{или} \quad \omega(x) \leqslant 0,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

причём равенство $\omega(x) = 0$ возможно лишь на множестве ν-мерной меры нуль, то функцию ω назовём *ν-знакопостоянной* на области $\mathcal{X}$, подразделяя на случаи *ν-знакоположительной* и *ν-знакоотрицательной* функции на области $\mathcal{X}$.

При $\nu = n$ будем говорить о знакопостоянной, знакоположительной и знакоотрицательной функции на области $\mathcal{X}$ из пространства $\mathbb{R}^n$.

Если функция $\omega\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ такова, что

$$\omega(x) > 0,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

то её назовём *определённоположительной* на $\mathcal{X}$, а если

$$\omega(x) < 0,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

то — *определённоотрицательной* на области $\mathcal{X}$.

Для определённоположительных и определённоотрицательных функций введём объединяющий термин — *знакоопределённые*.

Лакуной Θ области $\mathcal{X}$ с гомотопической группой $\pi_\nu(\mathcal{X})$ из арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, $\nu \leqslant n-1$, назовём непустое линейно связное множество Θ такое, что $\Theta \cap \mathcal{X} = \varnothing$ и существует гомеоморфное сфере S^ν многообразие, расположенное в области $\mathcal{X}$, при непрерывном стягивании которого в точку множество Θ служит препятствием.

§ 1. Ограниченность числа компактных регулярных интегральных многообразий

Автономную систему уравнений в полных дифференциалах (ACD) будем рассматривать, когда элементы X_{ij} матрицы X являются непрерывно дифференцируемыми функциями на области $\mathcal{X}$ из фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Введём в рассмотрение автономную обыкновенную дифференциальную систему n-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{AD}$$

где $f(x) = \operatorname{colon}\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$, причём векторная функция векторного аргумента $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ является непрерывно дифференцируемой на области $\mathcal{X}$, а $\dfrac{dx}{dt} = \operatorname{colon}\Big(\dfrac{dx_1}{dt}, \ldots, \dfrac{dx_n}{dt}\Big)$.

Для систем (ACD) и (AD) из всего множества интегральных многообразий, расположенных в области $\mathcal{X}$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$, будем выделять регулярные.

Определение 1. *Для автономной системы уравнений в полных дифференциалах* (ACD) (*автономной обыкновенной дифференциальной системы* (AD)) *интегральное многообразие назовём* ***регулярным****, если оно является ориентируемым и на нём нет сингулярных точек* (*состояний равновесия*) *этой дифференциальной системы.*

1. Автономная обыкновенная дифференциальная система

Признак ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий.

Пусть Ω_{t_0} есть ν-мерное при $3 \leqslant \nu \leqslant n$ многообразие, ограниченное $(\nu-1)$-мерными многообразиями $\Lambda^k_{t_0}$, $k = \overline{1, s}$, из пространства $\mathbb{R}^n$. При этом многообразия Ω_{t_0}, $\Lambda^k_{t_0}$, $k = \overline{1, s}$, состоят из точек $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, доставляемых решениями $x\colon t \to x(t)$, $\forall t \in J_0$, автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD) такими, что $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in J_0$, $x_0 \in \mathcal{X}$, причём, $n \geqslant 3$.

Составим многообразия Ω_{t_0+h}, $\Lambda^k_{t_0+h}$, $k = \overline{1, s}$, состоящие из точек $x^h = (x_1^h, \ldots, x_n^h)$, $x^h \in \mathcal{X}$, которые доставляются теми же решениями $x\colon t \to x(t)$, $\forall t \in J_0$, при $t = t_0 + h$, то есть, $x^h = x(t_0 + h)$, $x^h \in \mathcal{X}$.

Зададим отображения

$$\Omega\colon t \to \Omega(t),\ \ \Lambda^k\colon t \to \Lambda^k(t),\ k = \overline{1, s}\,,\ \forall t \in \mathrm{U}(t_0),$$

где $\mathrm{U}(t_0)$ — некоторая окрестность точки t_0, такие, что

$$\Omega(t_0) = \Omega_{t_0},\ \ \Lambda^k(t_0) = \Lambda^k_{t_0},\ k = \overline{1, s}\,.$$

Обозначим через $\mathbb{R}^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu}$ подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, образованное базисными координатами x_{ξ_j}, $j = \overline{1, \nu}$, а через $\Omega^{\xi_1\cdots\xi_\nu}_{t_0}$ — естественную проекцию многообразия Ω_{t_0} на подпространство $\mathbb{R}^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu}$.

Заметим, что среди всех ν-мерных подпространств $\mathbb{R}^{\nu}$, образованных на основании ν координат из базиса x_i, $i = \overline{1, n}$, существует хотя бы одно, в котором многообразие $\Omega^{\xi_1\cdots\xi_\nu}_{t_0}$ имеет размерность $\dim \Omega^{\xi_1\cdots\xi_\nu}_{t_0} = \nu$. С целью определённости допустим, что это подпространство $\mathbb{R}^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu}$. Через $V^{\xi_1\cdots\xi_\nu}_{t_0}$ обозначим ν-мерный объём многообразия $\Omega^{\xi_1\cdots\xi_\nu}_{t_0}$.

Как и ранее, определим отображения

$$\Omega^{\xi_1\cdots\xi_\nu}\colon t \to \Omega^{\xi_1\cdots\xi_\nu}(t),\ \ V^{\xi_1\cdots\xi_\nu}\colon t \to V^{\xi_1\cdots\xi_\nu}(t),\ \forall t \in \mathrm{U}(t_0),$$

такие, что

$$\Omega^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(t_0) = \Omega^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}_{t_0}, \ \ V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(t_0) = V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}_{t_0}.$$

При этом скалярная функция скалярного аргумента

$$V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu} : t \to \int\limits_{V_t^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}} dx^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}, \ \forall t \in U(t_0), \ \ x^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu} \in \mathbb{R}^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu},$$

представляет собой аддитивную функцию ν-мерного объёма.

У скалярной функции скалярного аргумента

$$V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu} : t \to V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(t), \ \forall t \in J(t_0),$$

найдём первую производную

$$\mathsf{D}V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu} : t \to \mathsf{D}V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(t), \ \forall t \in U(t_0),$$

характеризующую изменение на окрестности $\mathrm{U}(t_0)$ ν-мерного объёма $V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(t)$.

Дадим независимой переменной t приращение Δt и найдём коэффициент при Δt в формуле Тейлора с остаточным членом $o(\Delta t)$ для скалярной функции

$$V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu} : t + \Delta t \to V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(t + \Delta t), \ \forall (t + \Delta t) \in \mathrm{U}(t_0).$$

Пусть $\widetilde{x}_i = x_i(t + \Delta t), \, i = \overline{1, n}$. Тогда для любых $t + \Delta t$ из окрестности $\mathrm{U}(t_0)$

$$V^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(t + \Delta t) = \int\limits_{V_{t+\Delta t}^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}} d\,\widetilde{x}^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}, \ \ \widetilde{x}^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu} \in \mathbb{R}^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}.$$

С другой стороны, для любых $t + \Delta t$ из $\mathrm{U}(t_0)$

$$V^{\xi_1\ldots\xi_\nu}(t+\Delta t)=\int\limits_{V_t^{\xi_1\ldots\xi_\nu}} J\Big(\widetilde{x}^{\,\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu};x^\nu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}\Big)\,dx^\nu_{\xi_1\ldots\xi_\nu},$$

где $J\big(\widetilde{x}^{\,\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu};x^\nu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}\big)$ — якобиан. При этом

$$\widetilde{x}_i=x_i+f_i(x)\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n}\,,$$

а якобиан

$$J\Big(\widetilde{x}^{\,\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu};x^\nu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}\Big)=$$

$$=\begin{vmatrix}
1+\partial_{x_{\xi_1}}f_{\xi_1}(x)\Delta t+o(\Delta t) & \partial_{x_{\xi_2}}f_{\xi_1}(x)\Delta t+o(\Delta t) & \ldots & \ldots & \partial_{x_{\xi_\nu}}f_{\xi_1}(x)\Delta t+o(\Delta t)\\
\partial_{x_{\xi_1}}f_{\xi_2}(x)\Delta t+o(\Delta t) & 1+\partial_{x_{\xi_2}}f_{\xi_2}(x)\Delta t+o(\Delta t) & \ldots & \ldots & \partial_{x_{\xi_\nu}}f_{\xi_2}(x)\Delta t+o(\Delta t)\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\partial_{x_{\xi_1}}f_{\xi_\nu}(x)\Delta t+o(\Delta t) & \partial_{x_{\xi_2}}f_{\xi_\nu}(x)\Delta t+o(\Delta t) & \ldots & \ldots & 1+\partial_{x_{\xi_\nu}}f_{\xi_\nu}(x)\Delta t+o(\Delta t)
\end{vmatrix}=$$

$$=1+\Big(\operatorname{div}^{\,\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu}f(x)\Big)\Delta t+o(\Delta t),$$

где

$$\operatorname{div}^{\,\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu}f(x)=\sum_{j=1}^{\nu}\partial_{x_{\xi_j}}f_{\xi_j}(x),\ \forall x\in\mathcal{X}.$$

Поэтому первая производная скалярной функции

$$V^{\xi_1 \dots \xi_\nu} : t \to V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t), \ \forall t \in \mathrm{U}(t_0),$$

находится по формуле

$$\mathsf{D}\, V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t) = \int\limits_{V_t^{\xi_1 \dots \xi_\nu}} \operatorname{div}^{\nu}_{\xi_1 \dots \xi_\nu} f(x)\, dx^{\nu}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}, \ \forall t \in \mathrm{U}(t_0). \qquad (1)$$

В зависимости от ранга гомотопической группы области $\mathcal{X}$ укажем максимальное число возможных компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$ системы (AD).

Для этого предварительно оговорим расположение лакун области $\mathcal{X}$ относительно компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$ в зависимости от ранга гомотопической группы области $\mathcal{X}$.

Лемма 1. *Пусть λ-мерная линейно связная область $\mathcal{X}$ из n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ имеет при $3 \leqslant \nu \leqslant \lambda$ гомотопическую группу $\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})$ ранга $d\big(\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})\big) = r$ и существуют однозначные непрерывно дифференцируемые на области $\mathcal{X}$ скалярные функции $B^{\nu}_{\xi_1 \dots \xi_\nu} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, такие, что у однозначных векторных функций*

$$M^{\nu}_{\xi_1 \dots \xi_\nu} : x \to B^{\nu}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}(x) f(x), \ \forall x \in \mathcal{X},$$

все расходимости $\operatorname{div}^{\nu}_{\xi_1 \dots \xi_\nu} M^{\nu}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}$ являются ν-знакопостоянными на области $\mathcal{X}$. Тогда в любой линейно связной подобласти $\overset{*}{\mathcal{X}}$ области $\mathcal{X}$ с гомотопической группой $\pi_{\nu-1}(\overset{*}{\mathcal{X}})$ ранга $d\big(\pi_{\nu-1}(\overset{*}{\mathcal{X}})\big) = k, \ k \leqslant r$, относительно компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$ системы (AD) невозможна такая ситуация: всякое из $(\nu - 1)$-мерных компактных регулярных интегральных многообразий $\Lambda^1, \dots, \Lambda^k$ содержит внутри себя лишь свою лакуну, а $(\nu - 1)$-мерное компактное регулярное интегральное многообразие Λ^{k+1} содержит внутри себя все эти k лакун.

Доказательство. Будем использовать следующий факт.

Если дифференциальная система (AD) в линейно связной области $\mathcal{X}$ имеет компактное регулярное интегральное многообразие размерности $\nu - 1$, то автономная обыкновенная дифференциальная система, определяющая на $\mathcal{X}$ векторное поле $M^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(x) = B^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}(x) f(x)$, имеет то же компактное интегральное $(\nu - 1)$-мерное многообразие в $\mathcal{X}$.

Допустим противное: всякое из $(\nu - 1)$-мерных компактных регулярных интегральных многообразий $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^k$ системы (AD) содержит внутри себя свою лакуну, а $(\nu - 1)$-мерное компактное регулярное интегральное многообразие Λ^{k+1} содержит внутри себя все эти k лакун. Тогда существует такое целиком расположенное в области $\overset{*}{\mathcal{X}}$ многообразие Ω размерности $\dim \Omega = \nu$, что его ограничивают многообразия $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^k, \Lambda^{k+1}$.

Пусть $\mathbb{R}^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}$ есть подпространство фазового пространства $\mathbb{R}^n$, в котором естественная проекция $\Omega^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}$ многообразия Ω имеет размерность $\dim \Omega^{\xi_1 \cdots \xi_\nu} = \nu$.

Рассмотрим два логически возможных случая:

1) расходимость $\operatorname{div}^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu} M^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}$ на области $\overset{*}{\mathcal{X}}$ ν-знакоположительна;

2) расходимость $\operatorname{div}^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu} M^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}$ на области $\overset{*}{\mathcal{X}}$ ν-знакоотрицательна.

В первом случае на основании представления (1) приходим к выводу, что ν-мерный объём многообразия $\Omega^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}$ при $t \to +\infty$ возрастает. Учитывая же интегральность и регулярность многообразий Λ^j, $j = \overline{1, k+1}$, а также то, что их размерности $\dim \Lambda^j = \nu - 1$, $j = \overline{1, k+1}$, и $\nu \geqslant 3$, приходим к противоречию. Поскольку полученное противоречие будет наблюдаться для всякого подпространства $\mathbb{R}^{\nu}_{\xi_1 \cdots \xi_\nu}$, в котором естественная проекция $\Omega^{\xi_1 \cdots \xi_\nu}$ многообразия Ω имеет размерность $\dim \Omega^{\xi_1 \cdots \xi_\nu} = \nu$ при $\nu \geqslant 3$, то приходим к выводу о справедливости утверждения леммы в этом случае.

Во втором случае получаем аналогичное противоречие после замены t на $-t$. ■

Теорема 1 (*признак ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий автономной обыкновенной дифференциальной системы*). *Пусть* λ*-мерная линейно связная область* $\mathcal{X}$ *из арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$ *при* $3 \leqslant \nu \leqslant \lambda$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})$ *ранга* $d\bigl(\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})\bigr) = r$ *и существуют однозначные непрерывно дифференцируемые на области* $\mathcal{X}$ *скалярные функции* $B^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *такие, что у однозначных векторных функций векторного аргумента*

$$M^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu}\colon x \to B^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu}(x)f(x),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

все расходимости $\operatorname{div}^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu} M^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu}$ *являются* ν*-знакопостоянными на области* $\mathcal{X}$, *здесь* $\xi_1,\ldots,\xi_\nu$ — *выборки* ν*-размерности из* n *чисел. Тогда в области* $\mathcal{X}$ *система* (AD) *может иметь не более* r *компактных регулярных интегральных многообразий размерности* $\nu-1$.

Доказательство. При $r=1$ утверждение теоремы 1 следует из леммы 1.

Предположим, что утверждение теоремы 1 верно при $r=k$, то есть для всякой λ-мерной линейно связной области из $\mathbb{R}^n$ с гомотопической группой $\pi_{\nu-1}$ ранга $d(\pi_{\nu-1}) = k$.

Для λ-мерной линейно связной области $\mathcal{X}$ с гомотопической группой $\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})$ ранга $d(\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})) = k+1$ логически возможны два случая:

1) хотя бы одна из лакун не расположена внутри компактного регулярного интегрального многообразия размерности $\nu-1$;

2) всякая лакуна расположена внутри хотя бы одного компактного регулярного интегрального многообразия, имеющего размерность $\nu-1$.

В первом случае область $\mathcal{X}$ разобъём на две λ-мерные части так, чтобы внутри границы одной части содержалась вышеупомянутая лакуна, а внутри границы второй части — все остальные лакуны. Тогда в первой части нет $(\nu-1)$-мерных компактных регулярных интегральных многообразий системы (AD), а во второй части их не более $k-1$ (согласно допущению).

Стало быть, в первом случае в области $\mathcal{X}$ расположено не более $k-1$ компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$.

Рассмотрим второй случай. Предположим, что в области $\mathcal{X}$ расположено по крайней мере $k+1$ компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$. Тогда представляются две логические возможности:

а) нет компактного регулярного интегрального многообразия размерности $\nu-1$, содержащего внутри себя все лакуны;

б) существует компактное регулярное интегральное многообразие размерности $\nu-1$, содержащее внутри себя все лакуны.

Случай а). Пусть $\theta \geqslant 1$ лакун содержится внутри некоторого $(\nu-1)$-мерного компактного регулярного интегрального многообразия Λ^i и не существует $(\nu-1)$-мерного компактного регулярного интегрального многообразия Λ^j, которое, кроме этих θ лакун, содержит внутри себя ещё хотя бы одну из оставшихся $k-\theta$ лакун. Область $\mathcal{X}$ разобъём на две λ-мерные части так, что внутри границы одной части находится выделенное $(\nu-1)$-мерное компактное регулярное интегрального многообразие Λ^i и вне Λ^i нет лакун.

Тогда в силу леммы 1 ни внутри, ни вне этого многообразия Λ^i не может располагаться $(\nu-1)$-мерное компактное регулярное интегральное многообразие, содержащее внутри себя только эти θ лакун. Учитывая ранги гомотопических групп $\pi_{\nu-1}$ частей, заключаем, что в первой части может быть расположено не более θ компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$, а во второй — не более $k-\theta$.

Следовательно, в области $\mathcal{X}$ может быть расположено не более k компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$. И случай а) не реализуется.

Случай б). В силу леммы 1 все лакуны не могут располагаться внутри двух компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$. Тогда, согласно той же лемме, внутри внешнего компактного регулярного интегрального многообразия размерности $\nu-1$ должна находиться хотя бы одна лакуна, которую, кроме внешнего, не содержит внутри себя ни одно компактное регулярное интегральное многообразие размерности $\nu-1$.

Как и в случае 1) делим область, ограниченную внешним $(\nu-1)$-мерным компактным регулярным интегральным многообразием, на две λ-мерные части и приходим к выводу, что внутри $(\nu-1)$-мерного компактного регулярного интегрального многообразия содержится не более $k-1$ компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$.

Следовательно, в области $\mathcal{X}$ может быть расположено не более k компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$. И случай б) не реализуется.

Полученные противоречия показывают, что и в случае 2) в области $\mathcal{X}$ не может быть более k компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$ системы (AD). ■

Обратим внимание на вытекающее из теоремы 1

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *автономная обыкновенная дифференциальная система* (AD) *в области* $\mathcal{X}$ *не имеет неизолированных* $(\nu-1)$*-мерных компактных регулярных интегральных многообразий.*

При этом $(\nu-1)$-мерное компактное регулярное интегральное многообразие автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD) (автономной системы уравнений в полных дифференциалах (ACD)) назовём *изолированным*, если в некоторой его ε-окрестности нет других компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu-1$ этой системы.

Пример 1. Автономная дифференциальная система пятого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 + x_1 g(x) \equiv f_1(x), \ \ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_2 g(x) \equiv f_2(x),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3 - x_4 + x_3 g(x) \equiv f_3(x), \tag{2}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = x_3 - x_4 + x_4 g(x) \equiv f_4(x), \ \ \frac{dx_5}{dt} = -5x_5 g(x) \equiv f_5(x),$$

где функция

$$g\colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^5,$$

имеет трёхмерное компактное регулярное интегральное многообразие

$$\{x\colon g(x) = 1,\ x_5 = 0\},$$

так как производная в силу системы (2) равна

$$\mathsf{D}_t\big(g(x) - 1\big)\big|_{(2)} = 2\big(g(x) - 1\big)g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^5.$$

Единственность этого многообразия устанавливаем посредством теоремы 1 (в классе трёхмерных компактных регулярных интегральных многообразий).

Прямая $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ является прямой состояний равновесия системы (2). Область $\mathcal{X}$ из $\mathbb{R}^5\backslash\{x\colon x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$ имеет гомотопическую группу $\pi_3(\mathcal{X})$ ранга $d(\pi_3(\mathcal{X})) = 1$.

Пусть на $\mathcal{X}$

$$B^4_{1234}(x) = g^{-3}(x),\ \ B^4_{2345}(x) = B^4_{1345}(x) = B^4_{1245}(x) = B^4_{1235}(x) = 1.$$

Тогда у векторов-функций

$$M^4_{1234}(x) = B^4_{1234}(x)\big(f_1(x), \ldots, f_4(x), 0\big),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

$$M^4_{1235}(x) = \big(f_1(x), f_2(x), f_3(x), 0, f_5(x)\big),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

$$M^4_{1245}(x) = \big(f_1(x), f_2(x), 0, f_4(x), f_5(x)\big),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

$$M^4_{1345}(x) = \big(f_1(x), 0, f_3(x), f_4(x), f_5(x)\big),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

$$M^4_{2345}(x) = \big(0, f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)\big),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

расходимости являются 4-знакоопределёнными на области $\mathcal{X}$:

$$\operatorname{div}^4_{1234} M^4_{1234}(x) = \frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3} > 0;$$

$$\operatorname{div}^4_{1235} M^4_{1235}(x) = -(3{+}2x_4^2) < 0;\ \ \operatorname{div}^4_{1245} M^4_{1245}(x) = -(3{+}2x_3^2) < 0;$$

$$\operatorname{div}^4_{1345} M^4_{1345}(x) = -(3{+}2x_2^2) < 0;\ \ \operatorname{div}^4_{2345} M^4_{2345}(x) = -(3{+}2x_1^2) < 0.$$

Из этого по теореме 1 заключаем о единственности указанного трёхмерного компактного регулярного интегрального многообразия.

2. Автономная система уравнений в полных дифференциалах

Признак ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий. Признаки отсутствия компактных регулярных орбит.

2.1. Ограниченность числа компактных интегральных многообразий. Автономная система уравнений в полных дифференциалах (ACD) индуцирует m автономных обыкновенных дифференциальных систем n-го порядка

$$dx = X^j(x)\, dt_j\,,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{ADj}$$

где $X^j(x) = \bigl(X_{1j}(x), \ldots, X_{nj}(x)\bigr)$.

Будем считать, что векторные поля X^j, $j = \overline{1,m}$, непрерывно дифференцируемы на области $\mathcal{X}$ из $\mathbb{R}^n$.

Методом фиксирования $m-1$ независимых переменных t_j приходим к следующему выводу.

Лемма 1. *Пусть система* (ACD) *имеет регулярное интегральное многообразие. Тогда каждая из систем* (ADj)*,* $j = \overline{1,m}$*, имеет это же регулярное интегральное многообразие. При этом компактность регулярных интегральных многообразий сохраняется.*

Эта лемма позволяет, основываясь на теореме 1.1, указать достаточные условия, при которых существует верхняя граница числа возможных компактных регулярных интегральных многообразий у системы (ACD).

Теорема 1 (*признак ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий автономной системы уравнений в полных дифференциалах*). *Пусть* λ*-мерная линейно связная область* $\mathcal{X}$ *из пространства* $\mathbb{R}^n$ *имеет при* $3 \leqslant \nu \leqslant \lambda$ *гомотопическую группу* $\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})$ *ранга* $d\bigl(\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})\bigr) = r$ *и существуют однозначные непрерывно дифференцируемые на области* $\mathcal{X}$ *скалярные функции векторного аргумента* $B^{\nu}_{\xi_1\cdots\xi_\nu j}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *такие, что у однозначных векторных функций векторного аргумента*

$$M^{\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu j}\colon x \to B^{\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu j}(x) X^j(x), \ \forall x \in \mathcal{X},$$

все расходимости $\operatorname{div}^{\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu} M^{\nu}_{\xi_1\ldots\xi_\nu j}(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, *являются ν-знакопостоянными на области* $\mathcal{X}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *автономная система уравнений в полных дифференциалах* (ACD) *может иметь не более* r *компактных регулярных интегральных многообразий размерности* $\nu-1$.

Используя оценки теоремы 1, последовательно по дифференциальным системам (AD1), (AD2), ..., (ADm) устанавливаем итоговое число компактных регулярных интегральных многообразий.

Относительно неизолированных компактных регулярных интегральных многообразий системы (ACD) отметим вытекающую из теоремы 1.1 закономерность.

Следствие 1. *Если существует* $j \in \{1,\ldots,m\}$ *такое, что автономная обыкновенная дифференциальная система* (ADj) *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то в области* $\mathcal{X}$ *автономная система уравнений в полных дифференциалах* (ACD) *не имеет неизолированных компактных регулярных многообразий размерности* $\nu-1$.

Пример 1. Для автономной системы

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \big(-x_1 - x_2 + x_1 g(x)\big)\,dt_1 + \big(-x_1 + x_4 + x_1 g(x)\big)\,dt_2,\\
dx_2 &= \big(x_1 - x_2 + x_2 g(x)\big)\,dt_1 + \big(-x_2 + x_3 + x_2 g(x)\big)\,dt_2,\\
dx_3 &= \big(-x_3 - x_4 + x_3 g(x)\big)\,dt_1 + \big(-x_2 - x_3 + x_3 g(x)\big)\,dt_2,\\
dx_4 &= \big(x_3 - x_4 + x_4 g(x)\big)\,dt_1 + \big(-x_1 - x_4 + x_4 g(x)\big)\,dt_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где функция

$$g\colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

сфера $S^3 = \{x\colon g(x) = 1\}$ является трёхмерным компактным регулярным интегральным многообразием:

$$d\big(g(x)-1\big)\big|_{(1)} = 2\big(g(x)-1\big)g(x)(dt_1 + dt_2), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^6.$$

Рассмотрим систему (AD1), индуцированную системой (1).

Пусть

$$B^4_{1234}\colon x \to \frac{1}{g^3(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X},\ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}.$$

Тогда для системы (AD1) у вектора-функции M^4_{1234} расходимость является 4-знакоположительной на области $\mathcal{X}$:

$$\operatorname{div} M^4_{1234}(x) = \frac{2}{g^3(x)} > 0,\ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Учитывая, что ранг $d(\pi_3(\mathcal{X})) = 1$, по теореме 1.1 заключаем, что выделенная сфера S^3 является единственным трёхмерным компактным регулярным интегральным многообразием автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD1).

В соответствии с теоремой 1 эта сфера есть единственное трёхмерное компактное регулярное интегральное многообразие системы (1).

2.2. Признаки отсутствия компактных регулярных орбит. Автономную систему уравнений в полных дифференциалах (ACD), когда у матрицы $X \in \mathbb{M}^{n,m}$ элементы $X_{ij}\colon x \to X_{ij}(x),\ \forall x \in \mathcal{X}$, $i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,,$ голоморфны на области $\mathcal{X}$ из фазового пространства $\mathbb{R}^n$, с целью точности формулировок утверждений будем называть *голоморфной на области* $\mathcal{X}$.

Теорема 2. *Пусть для вполне разрешимой голоморфной системы* (IACD) *существует такая однозначная непрерывно дифференцируемая на области* $\mathcal{X}$ *скалярная функция* $F\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, *что*

$$\mathfrak{r}_j(x)F(x) = H_j(x),\ \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1,m}\,, \tag{2}$$

и хотя бы при одном $k \in \{1,\ldots,m\}$ *функция* $H_k\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *знакоопределена на области* $\mathcal{X}$. *Тогда система* (IACD) *не имеет компактных регулярных орбит, целиком расположенных в области* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Допустим, что в области $\mathcal{X}$ расположена компактная регулярная орбита вполне разрешимой голоморфной системы (IACD), соответствующая периодическому решению $x\colon t \to x(t),\ \forall t \in \mathcal{T}$, с периодом $T = (T_1,\ldots,T_m)$ и начальным условием $x_0 = x(t_0),\ t_0 = (t_{01},\ldots,t_{0m}),\ t_0 \in \mathcal{T},\ x_0 \in \mathcal{X}$.

Тогда $T_j \neq 0,\ j = \overline{1,m}\,,$ и, по теореме 5.4 из [15, с. 31], это решение продолжимо на всё арифметическое пространство $\mathbb{R}^m$.

Полагая, что функция $H_k\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ определённоположительная (определённоотрицательная) на области $\mathcal{X}$, из (2) имеем, что при $t_j = t_{0j},\, j = \overline{1,m}\,,\, j \neq k,\; t_{0k} \leqslant t_k \leqslant t_{0k} + T_k$ функция $v\colon t_k \to F(x(t))$ строго возрастает (строго убывает).

Поэтому

$$v(t_{0k}) < v(t_{0k} + T_k) \ \bigl(v(t_{0k}) > v(t_{0k} + T_k)\bigr),$$

что, с учётом однозначности F, противоречит периодичности решения $x\colon t \to x(t),\ \forall t \in \mathcal{T}$.

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Заметим, что, если область $\mathcal{X}$ является односвязной, то непрерывно дифференцируемая функция $F\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ является однозначной на $\mathcal{X}$.

Признак, сформулированный в теореме 2, согласуется с теоремой Пуанкаре [100, с. 112 − 136] и её обобщённым вариантом [103], когда, используя обобщённую функцию Ляпунова [107], устанавливается отсутствие замкнутых траекторий у автономной обыкновенной дифференциальной системы второго порядка.

Относительно вполне разрешимой линейной однородной системы уравнений в полных дифференциалах (1.1.4.2) в соответствии с теоремой 1.1 из [7, с. 30] (или леммой 7.5.1 из [9, с. 249]) и теоремой 2 можем утверждать

Теорема 3. *Если хотя бы у одной матрицы* A_k *собственные числа* $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ *таковы, что*

$$\lambda_i^k + \lambda_\xi^k \neq 0,\ i = \overline{1,n}\,,\ \xi = \overline{1,n}\,,\ k \in \{1, \ldots, m\},$$

то вполне разрешимая линейная однородная система уравнений в полных дифференциалах (1.1.4.2) *не имеет компактных регулярных орбит.*

Введём в рассмотрение 1-форму

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i,\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3}$$

которая является точной на области $\mathcal{X}$ и имеет непрерывно дифференцируемые коэффициенты-функции $\omega_i\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}\,$.

Тогда [5, с. 50] существует такая однозначная скалярная фукнция $F\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, что

$$dF(x) = \omega(x), \ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Значит,

$$\mathfrak{x}_j(x)F(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)X_{ij}(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ j = \overline{1,m}\,, \tag{4}$$

и, по теореме 2, заключаем, что имеет место

Теорема 4. *Если для вполне разрешимой голоморфной автономной системы уравнений в полных дифференциалах* (IACD) *существует точная на области* $\mathcal{X}$ *такая* 1*-форма* (3), *что хотя бы при одном* k *из множества* $\{1,\ldots,m\}$ *сумма* $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(x)X_{ik}(x)$ *знакоопределена на области* $\mathcal{X}$, *то система* (IACD) *не имеет компактных регулярных орбит, целиком расположенных в области* $\mathcal{X}$.

Отметим, что теорема 4 (в отличие от теоремы 2) не требует знать функцию F, а предполагает лишь знание знакоопределённости на области $\mathcal{X}$ её производной (4) в силу одной из автономных обыкновенных дифференциальных систем (ADk), индуцированных вполне разрешимой голоморфной на $\mathcal{X}$ системой (IACD).

§2. Ограниченность числа компактных интегральных гиперповерхностей

Наряду с автономной обыкновенной дифференциальной системой (AD), автономной системой уравнений в полных дифференциалах (ACD) будем рассматривать линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{r}_j(x)y = 0,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{∂ACD}$$

систему уравнений Пфаффа

$$\ell_j(x) = 0,\ j = \overline{1,m}\,, \tag{Pf}$$

и систему внешних дифференциальных уравнений

$$\xi_j(x) = 0,\ j = \overline{1,m}\,. \tag{ED}$$

Каждая из диффференциальных систем (AD),(ACD),(∂ACD), (Pf), (ED) *голоморфна* на области $\mathcal{X}$, то есть, векторная функция векторного аргумента $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, матрица $X\colon \mathcal{X} \to \mathbb{M}^{n,m}$, линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{r}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x)\partial_{x_i},\ \forall x \in \mathcal{X},$$

линейные дифференциальные формы первого порядка

$$\ell_j(x) = \sum_{i=1}^{n} l_{ji}(x)\, dx_i,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

составлены на основании голоморфных на области $\mathcal{X}$ из пространства $\mathbb{R}^n$ скалярных функций векторного аргумента

$$f_i\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ \ X_{ij}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ \ l_{ij}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ \ i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,m}\,,$$

а у p_j-форм $\xi_j,\ 1 \leqslant p_j \leqslant n-1,\ j = \overline{1,m}\,,$ коэффициенты голоморфны на области $\mathcal{X}$.

1. Система внешних дифференциальных уравнений

Признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей. Свойство суммарного индекса множества лакун внутри компактных интегральных гиперповерхностей.

Теорема 1 (*признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы внешних дифференциальных уравнений*). *Пусть область* $\mathcal{X}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ *ранга* $d\big(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\big)=r$ *и существуют* $(n-2)$*-форма* α *и* $(n-p_j-1)$*-формы* $\zeta_j,\ j=\overline{1,m}$, *с дважды непрерывно дифференцируемыми на области* $\mathcal{X}$ *коэффициентами у* $(n-2)$*-формы* α *и непрерывно дифференцируемыми на области* $\mathcal{X}$ *коэффициентами у* $(n-p_j-1)$*-форм* $\zeta_j,\ j=\overline{1,m}$, *такие, что на области* $\mathcal{X}$ *внешний дифференциал суммы*

$$d\biggl(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{ED})}+\sum_{j=1}^{m}\xi_j(x)\wedge\zeta_j(x)\biggr)=b(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n, \qquad (1)$$

где функция $b\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ *знакопостоянна на области* $\mathcal{X}$. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная система внешних дифференциальных уравнений* (ED) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.1 при $\nu=n$ и основано на следующей

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда во всякой подобласти* Ω *области* $\mathcal{X}$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\Omega)$ *ранга* $d\big(\pi_{n-1}(\Omega)\big)=s$ *при* $s\leqslant r$ *относительно компактных интегральных гиперповерхностей системы внешних дифференциальных уравнений* (ED) *невозможна такая ситуация: всякая из* s *лакун содержится внутри своей компактной интегральной гиперповерхности* $\partial\Sigma_1,\ldots,\partial\Sigma_s$, *компактная интегральная гиперповерхность* $\partial\Sigma_{s+1}$ *содержит внутри себя эти* s *лакун, причём гиперповерхности* $\partial\Sigma_1,\ldots,\partial\Sigma_s$ *не пересекаются, не содержатся* *друг в друге и все целиком располагаются внутри гиперповерхности* $\partial\Sigma_{s+1}$.

Доказательство проведём от противного, полагая, что описанная в лемме ситуация имеет место. Через Σ обозначим область, ограниченную гиперповерхностью $\partial\Sigma = \bigcup\limits_{\tau=1}^{s+1} \partial\Sigma_\tau$.

По формуле Стокса для ориентированого многообразия с краем с учётом тождества (1) устанавливаем, что

$$\int\limits_{\partial\Sigma} \Big(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{ED})} + \sum_{j=1}^{m} \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x) \Big) = \tag{2}$$

$$= (-1)^n \int\limits_{\Sigma} d\Big(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{ED})} + \sum_{j=1}^{m} \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x) \Big) = (-1)^n \int\limits_{\Sigma} b(x)\, d\Sigma.$$

Используя теорему Пуанкаре [105, с. 111], в силу системы внешних дифференциальных уравнений (ED) получаем

$$\int\limits_{\partial\Sigma} \Big(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{ED})} + \sum_{j=1}^{m} \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x) \Big)\Big|_{(\mathrm{ED})} = \tag{3}$$

$$= (-1)^n \int\limits_{\Sigma} d\big(d\alpha(x)|_{(\mathrm{ED})} \big) + \int\limits_{\partial\Sigma} \sum_{j=1}^{m} \big(\xi_j(x) \wedge \zeta_j(x) \big)\big|_{(\mathrm{ED})} = 0.$$

В силу связи (2) равенство (3) невозможно, по причине того, что у кратного интеграла, расположенного в правой части цепочки равенств (2), подынтегральная функция знакопостоянна на $\mathcal{X}$, а $\Sigma \subset \Omega \subset \mathcal{X}$. Полученное противоречие и доказывает утверждение леммы 1. ■

Пример 1. Система внешних дифференциальных уравнений

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\big(x_2^2\, dx_1 + (x_3 + x_4^2)\, dx_2 \big) +$$
$$+ (x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_4^2)\, dx_3 +$$

$$+\,(2x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2)\,dx_4 = 0,$$

$$dx_1 + x_1(\,-2x_2 + x_1^2)\,dx_2 + (x_1^2 + x_3^2)\,dx_3 + (x_2^2 + x_4^2)\,dx_4 = 0,$$

$$\big(\,-1 + 2x_1 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(1 - x_2^2)\big)\,dx_1 + \qquad (4)$$

$$+\,\big(5 + 2x_2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(5 + x_3 + x_4^2)\big)\,dx_2 +$$

$$+\,(\,-x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_4^2)\,dx_3 +$$

$$+\,(\,-2x_2 + x_3 - 3x_4 - 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 5x_4^2)\,dx_4 = 0,$$

$$x_1^2\,dx_1 \wedge dx_4 + x_2^2\,dx_2 \wedge dx_3 = 0$$

такова, что для дифференциальных 2-форм

$$\alpha(x) = x_1\,dx_3 \wedge dx_4,\ \ \zeta_1(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\,dx_3 \wedge dx_4,$$

$$\zeta_2(x) = \zeta_3(x) = 0,$$

и 1-формы $\zeta_4(x) = 0$ справедливы соотношения на $\mathbb{R}^4\backslash\{(0,0,0,0)\}$:

$$d\alpha(x)_{|(4)} = x_1(2x_2 - x_1^2)\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$$

$$\xi_1(x) \wedge \zeta_1(x) = x_2^2\,dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (x_3 + x_4^2)\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$$

$$\xi_2(x) \wedge \zeta_2(x) = \xi_3(x) \wedge \zeta_3(x) = \xi_4(x) \wedge \zeta_4(x) = 0,$$

$$d\Big(d\alpha(x)_{|(4)} + \sum_{j=1}^{4} \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x)\Big) = \,-3x_1^2\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Значит (по теореме 1), в области $\mathbb{R}^4\backslash\{(0,0,0,0)\}$ с гомотопической группой π_3 ранга $d = 1$ система (4) может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

Если теперь учесть, что

$$dw(x) = \big(\xi_1(x) + \xi_3(x)\big)_{|w(x)=0},$$

где

$$w(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

то сфера $S^3 = \{x \colon w(x) = 0\}$ и будет этой компактной интегральной гиперповерхностью системы внешних дифференциальных уравнений (4).

Возможность того, что та или иная лакуна или совокупность лакун области $\mathcal{X}$ не содержатся внутри компактной интегральной гиперповерхности системы внешних дифференциальных уравнений (ED), может быть рассмотрена на основании понятия инвариантности дифференциальной формы на области $\mathcal{X}$ относительно системы (ED).

Дифференциальную $(n-2)$-форму θ назовём *инвариантной* на области $\mathcal{X}$ относительно системы внешних дифференциальных уравнений (ED), если она является замкнутой на любом $(n-2)$-мерном интегральном многообразии этой системы, то есть, если

$$d\theta(x)\big|_{(\mathrm{ED})} = 0, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

или, иначе, если существуют $(n-p_j-1)$-формы γ_j, $j = \overline{1,m}$, с непрерывно дифференцируемыми на области $\mathcal{X}$ коэффициентами, такие, что внешний дифференциал

$$d\theta(x) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j(x) \wedge \gamma_j(x), \ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Индексом лакуны Θ области $\mathcal{X}$ из пространства $\mathbb{R}^n$ относительно замкнутой дифференциальной $(n-1)$-формы δ на области $\mathcal{X}$ назовём число

$$\operatorname{ind}_\delta \Theta = \int\limits_S \delta,$$

где S — многообразие, гомеоморфное гиперсфере, расположенное в области $\mathcal{X}$, при непрерывном стягивании которого в точку лакуна Θ и лишь она служит препятствием.

Теорема 2. *Пусть область $\mathcal{X}$ из арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ ранга $d\big(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\big) = r$ и существуют $(n-2)$-формы α и θ, а также $(n-p_j-1)$-формы ζ_j, $j = \overline{1,m}$, с дважды непре-*

рывно дифференцируемыми на области $\mathcal{X}$ *коэффициентами у* $(n-2)$*-форм* α *и* θ *и непрерывно дифференцируемыми на области* $\mathcal{X}$ *коэффициентами у* $(n-p_j-1)$*-форм* $\zeta_j,\ j=\overline{1,m}$, *такие, что* $(n-2)$*-форма* θ *является инвариантной на области* $\mathcal{X}$ *относительно голоморфной системы внешних дифференциальных уравнений* (ED) *и на* $\mathcal{X}$ *внешний дифференциал суммы*

$$d\Big(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{ED})}+d\theta(x)+\sum_{j=1}^{m}\xi_j(x)\wedge\zeta_j(x)\Big)=b(x)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n, \quad (5)$$

где функция $b\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ *знакопостоянна на* $\mathcal{X}$. *Тогда*:

1) *в области* $\mathcal{X}$ *система* (ED) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей*;

2) *всякое множество лакун области* $\mathcal{X}$, *содержащихся внутри компактной интегральной гиперповерхности системы внешних дифференциальных уравнений* (ED)*, имеет нулевой суммарный индекс относительно* $(n-1)$*-формы* $d\theta$.

Доказательство. Первое утверждение является непосредственным следствием теоремы 1 с учётом того, что на $\mathcal{X}$ внешний дифференциал

$$d\Big(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{ED})}+d\theta(x)+\sum_{j=1}^{m}\xi_j(x)\wedge\zeta_j(x)\Big)=$$

$$=d\Big(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{ED})}+\sum_{j=1}^{m}\xi_j(x)\wedge\zeta_j(x)\Big),$$

и, значит, из условия (5) вытекает условие (1).

Второе утверждение докажем методом от противного.

Пусть лакуны $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ имеют ненулевой суммарный индекс относительно $(n-1)$-формы $d\theta$ на области $\mathcal{X}$:

$$\sum_{\tau=1}^{s}\operatorname{ind}_{d\theta}\Theta_\tau\neq 0.$$

Тогда по любой компактной гиперповерхности $\partial\Xi$ из области $\mathcal{X}$, содержащей внутри себя лакуны Θ_τ, $\tau = \overline{1,s}$, и только их, интеграл $\int\limits_{\partial\Omega} d\theta(x) \ne 0.$

Допустим, что в множестве компактных гиперповерхностей $\partial\Xi$ существует интегральная системы внешних дифференциальных уравнений (ED); обозначим её $\partial\Sigma$. Тогда и интеграл

$$\int\limits_{\partial\Sigma} d\theta(x) \ne 0.$$

С другой стороны, $(n-2)$-форма θ инвариантна на области $\mathcal{X}$ относительно ситемы (ED), а значит, интеграл

$$\int\limits_{\partial\Sigma} d\theta(x) = 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. ■

2. Система уравнений Пфаффа

Первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей. Свойство суммарного индекса множества лакун внутри компактных интегральных гиперповерхностей. Второй признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей. Отсутствие изолированных компактных интегральных гиперповерхностей у линейной системы уравнений Пфаффа.

Непосредственными следствиями теорем 1.1 и 2.1 на случай системы уравнений Пфаффа являются следующие утверждения.

Теорема 1 (*первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы уравнений Пфаффа*). *Пусть область $\mathcal{X}$ из n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ ранга $d\big(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\big) = r$ и существуют $(n-2)$-формы α и ω_j, $j = \overline{1,m}$, с дважды непрерывно дифференцируемыми на области $\mathcal{X}$ коэффициентами у $(n-2)$-формы α и непрерывно дифференцируемыми на области $\mathcal{X}$ коэффициентами у*

$(n-2)$-форм ω_j, $j=\overline{1,m}$, такие, что внешний дифференциал суммы на области $\mathcal{X}$

$$d\Big(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{Pf})}+\sum_{j=1}^{m} l_j(x)\wedge\omega_j(x)\Big)=b(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n,$$

где функция $b\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$ знакопостоянна на области $\mathcal{X}$. Тогда в области $\mathcal{X}$ голоморфная система уравнений Пфаффа (Pf) *может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.*

Теорема 2. *Пусть область $\mathcal{X}$ из n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ ранга $d\big(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\big)=r$ и существуют $(n-2)$-формы α,θ и ω_j, $j=\overline{1,m}$, с дважды непрерывно дифференцируемыми на области $\mathcal{X}$ коэффициентами у $(n-2)$-форм α и θ и непрерывно дифференцируемыми на области $\mathcal{X}$ коэффициентами у $(n-2)$-форм ω_j, $j=\overline{1,m}$, такие, что $(n-2)$-форма θ является инвариантной на области $\mathcal{X}$ относительно голоморфной системы уравнений Пфаффа* (Pf), *и внешний дифференциал суммы на области $\mathcal{X}$*

$$d\Big(d\alpha(x)\big|_{(\mathrm{Pf})}+d\theta(x)+\sum_{j=1}^{m} l_j(x)\wedge\omega_j(x)\Big)=b(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n,$$

где функция $b\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$ знакопостоянна на $\mathcal{X}$. Тогда:

1) *на области $\mathcal{X}$ система уравнений Пфаффа* (Pf) *может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей*;

2) *всякое множество лакун области $\mathcal{X}$, содержащихся внутри компактной интегральной гиперповерхности системы уравнений Пфаффа* (Pf), *имеет нулевой суммарный индекс относительно $(n-1)$-формы $d\theta$.*

Пример 1. Система уравнений Пфаффа

$$x_1\,dx_1+x_2\,dx_2+(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(x_4\,dx_3-x_3\,dx_4)=0,$$
$$x_1\,dx_1+x_2\,dx_2+(2x_3-x_4)\,dx_3+(x_3+2x_4)\,dx_4=0$$

такова, что на области $\mathbb{R}^4\backslash\{(0,0,0,0)\}$ для дифференциальных 2-форм

$$\alpha(x)=0,\ \ \omega_1(x)=\frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}\,dx_1\wedge dx_2,\ \ \omega_2(x)=dx_3\wedge dx_4$$

справедливы соотношения:

$$l_1(x)\wedge\omega_1(x)=x_4\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3-x_3\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4,$$

$$l_2(x)\wedge\omega_2(x)=x_1\,dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4+x_2\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4,$$

$$d\big(l_1(x)\wedge\omega_1(x)+l_2(x)\wedge\omega_2(x)\big)\,=\,-\,2\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4.$$

Следовательно (по теореме 1), в области $\mathbb{R}^4\backslash\{(0,0,0,0)\}$ с гомотопической группой π_3 ранга $d\,=\,1$ система уравнений Пфаффа может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

Если учесть, что

$$dw(x)=\big(l_1(x)+l_2(x)\big)_{|w(x)=0},$$

где функция

$$w(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-1,\ \forall x\in\mathbb{R}^4,$$

то сфера $S^3\,=\,\{x\colon w(x)\,=\,0\}$ и будет этой компактной интегральной гиперповерхностью.

Пример 2. Система уравнений Пфаффа

$$x_3\big((x_1-2)^2+x_2^2+x_3^2\big)\,dx_1+x_3\,dx_2+x_2\big((x_1-2)^2+x_2^2+x_3^2\big)\,dx_3=0,$$

$$\Big(\big(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2\big)^2+x_3^2-1+x_1\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\big(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2\big)\Big)\,dx_1+$$

$$+\Big(\big(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2\big)^2+x_3^2-1+x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\big(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2\big)\Big)\,dx_2+$$

$$+\,x_3(x_1^2+x_2^2)\,dx_3=0$$

такова, что на области $\mathbb{R}^3\backslash\{(2,0,0)\}$ для дифференциальных 1-форм

$$\alpha(x)=0,\quad \omega_1(x)=\frac{1}{(x_1-2)^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_2,\quad \omega_2(x)=0$$

справедливы соотношения:

$$l_1(x)\wedge\omega_1(x)=x_3\,dx_1\wedge dx_2-x_2dx_2\wedge dx_3,\quad l_2(x)\wedge\omega_2(x)=0,$$

$$d\bigl(l_1(x)\wedge\omega_1(x)+l_2(x)\wedge\omega_2(x)\bigr)=dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3,\ \forall x\in\mathbb{R}^3\backslash\{(2,0,0)\}.$$

Следовательно (по теореме 1), в области $\mathbb{R}^3\backslash\{(2,0,0)\}$ с гомотопической группой π_2 ранга $d=1$ система уравнений Пфаффа может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

Если теперь учесть, что

$$dw(x)=\frac{2}{x_1^2+x_2^2}\,l_2(x)|_{w(x)=0},$$

где

$$w(x)=\bigl(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2\bigr)^2+x_3^2-1,\ \forall x\in\mathbb{R}^3,$$

то двумерный тор $\{x\colon w(x)=0\}$ и будет этой компактной интегральной гиперповерхностью.

Укажем ещё один признак для системы уравнений Пфаффа.

Теорема 3 (*второй признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы уравнений Пфаффа*). *Пусть область* $\mathfrak{X}$ *из* n*-мерного арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(\mathfrak{X})$ *ранга* $d\bigl(\pi_{n-1}(\mathfrak{X})\bigr)=r$ *и существует непрерывно дифференцируемое на области* V *векторное поле* $B\colon\mathfrak{X}\to\mathbb{R}^n$, *ортогональное векторным полям*

$$A_j(x)=\bigl(a_{j1}(x),\ldots,a_{jn}(x)\bigr),\ \forall x\in\mathfrak{X},\ j=\overline{1,m}\,,$$

такое, что расходимость $\operatorname{div}B$ *знакопостоянна на области* $\mathfrak{X}$. *Тогда в области* $\mathfrak{X}$ *голоморфная система уравнений Пфаффа* (Pf) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.1 при $\nu=n$ и основано на следующей закономерности

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда в подобласти* Ω *области* $\mathfrak{X}$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\Omega)$ *ранга* $d\bigl(\pi_{n-1}(\Omega)\bigr)=s$ *при* $s\leqslant r$ *относительно компактных интегральных гиперповерхностей голоморфной системы уравнений Пфаффа* (Pf) *невозможна ситуация, описанная в лемме* 1.1.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1, при этом используем формулу Остроградского [83, с. 111]

$$\int\limits_{\partial\Sigma} B(x)\cdot \vec{n}(x)\, dS = (\,-\,1)^n \int\limits_{\Sigma} \operatorname{div} B(x)\, d\Sigma,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к интегральной гиперповерхности $\partial\Sigma = \bigcup\limits_{\tau=1}^{s+1} \partial\Sigma_\tau$ системы уравнений Пфаффа (Pf), с учётом ортогональности векторных полей $A_j,\ j=\overline{1,m}\,,$ к гиперповерхности $\partial\Sigma$ и знакопостоянства на области $\mathcal{X}$ скалярной функции векторного аргумента $\operatorname{div} B\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}.$ ■

Пример 3. Система уравнений Пфаффа

$$\bigl(x_1 - x_2 + x_2 g(x)\bigr)\,dx_1 + \bigl(x_1 + x_2 - x_1 g(x)\bigr)\,dx_2 +$$

$$+\bigl(x_3 - x_4 + x_4 g(x)\bigr)\,dx_3 + \bigl(x_3 + x_4 - x_3 g(x)\bigr)\,dx_4 = 0,$$

$$\bigl(x_3 - x_4 + x_4 g(x)\bigr)\,dx_1 + \bigl(x_3 + x_4 - x_3 g(x)\bigr)\,dx_2 +$$

$$+\bigl(x_1 - x_2 + x_2 g(x)\bigr)\,dx_3 + \bigl(x_1 + x_2 - x_1 g(x)\bigr)\,dx_4 = 0,$$

где скалярная функция

$$g\colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^4,$$

такова, что непрерывно дифференцируемое на $\mathbb{R}^4\backslash\{(0,0,0,0)\}$ векторное поле

$$B\colon x\to \frac{1}{g^3(x)}\,\bigl(-\,x_1 - x_2 + x_1 g(x),\ x_1 - x_2 + x_2 g(x),$$

$$-\,x_3 - x_4 + x_3 g(x),\ x_3 - x_4 + x_4 g(x)\bigr),\ \forall x\in\mathbb{R}^4\backslash\{(0,0,0,0)\},$$

ортогонально векторным полям A_1 и $A_2,$ и его расходимость

$$\operatorname{div} B(x) = 2g^{-3}(x)$$

знакоположительна на этой области.

Следовательно (по теореме 3), в области $\mathbb{R}^4\backslash\{(0,0,0,0)\}$ с гомотопической группой π_3 ранга $d=1$ система уравнений Пфаффа может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

Если учесть, что

$$dw(x) = 2l_1(x)_{|w(x)=0},$$

где $w(x) = g(x) - 1,$ то сфера $S^3 = \{x\colon w(x) = 0\}$ и будет этой компактной интегральной гиперповерхностью.

Следствие 1. *Линейная система уравнений Пфаффа не имеет изолированных компактных интегральных гиперповерхностей.*

Доказательство. Рассмотрим две логические возможности:

1) существует номер $k \in \{1, \ldots, m\}$ такой, что

$$d\ell_k(x) \neq 0;$$

2) на пространстве $\mathbb{R}^n$

$$d\ell_j(x) = 0,\ j = \overline{1, m}\,,$$

У внешнего дифференциала

$$d\ell_k(x) = \sum_{1 \leqslant i < \tau \leqslant n} c_{i\tau k}\, dx_i \wedge dx_\tau$$

в первом случае коэффициенты $c_{i\tau k}$ суть числа из поля $\mathbb{R},$ одновременно не обращающиеся в нуль.

Пусть $c_{\lambda\rho k} \neq 0,\ \lambda < \rho.$ В качестве $(n-2)$-формы возьмём

$$\omega(x) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda-1} \wedge dx_{\lambda+1} \wedge dx_{\lambda+2} \wedge \ldots \wedge dx_{\rho-1} \wedge$$
$$\wedge dx_{\rho+1} \wedge dx_{\rho+2} \wedge \ldots \wedge dx_n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда внешний дифференциал внешнего произведения

$$d\big(\ell_k(x) \wedge \omega(x)\big) = \pm\, c_{\lambda\rho k}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда (по теореме 1) заключаем, что линейная система уравнений Пфаффа не имеет не только изолированных компактных, но и компактных интегральных гиперповерхностей.

Во втором случае 1-формы $\ell_j,\ j = \overline{1, m}\,,$ суть полные дифференциалы на $\mathbb{R}^n,$ и, стало быть, линейная система уравнений

Пфаффа имеет базис первых интегралов $Q_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j=\overline{1,m}$, в виде полиномов не выше второй степени. В силу алгебраичности базиса первых интегралов заключаем об отсутствии изолированных компактных интегральных гиперповерхностей. ■

При доказательстве следствия 1 были доказаны и такие закономерности относительно компактных интегральных гиперплоскостей линейной системы уравнений Пфаффа.

Следствие 2. *Если у линейной системы Пфаффа*

$$\ell_j(x)=0,\ j=\overline{1,m}\,,$$

хотя бы при одном $k,\ 1\leqslant k\leqslant m$, *внешний дифференциал* $d\ell_k(x)\neq 0$, *то у неё нет компактных интегральных гиперповерхностей.*

Следствие 3. *Неизолированные компактные интегральные гиперповерхности линейной системы уравнений Пфаффа являются алгебраическими гиперповерхностями второго порядка.*

3. Автономная обыкновенная дифференциальная система

Признаки ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей.

Автономная обыкновенная дифференциальная система (AD) индуцирует систему $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений Пфаффа

$$\chi_{qh}(x)=0,\ 1\leqslant q<h\leqslant n, \tag{1}$$

где 1-формы

$$\chi_{qh}(x)=f_q(x)\,dx_h-f_h(x)\,dx_q,\ \forall x\in\mathcal{X},\ 1\leqslant q<h\leqslant n,$$

являются замкнутыми на области $\mathcal{X}$.

Базис автономных первых интегралов системы (AD) является базисом первых интегралов системы уравнений Пфаффа (1) и наоборот.

Это позволяет перенести теоремы 1.2 и 2.2 на случай системы (AD), которые соответственно назовём теоремами 1.2D (первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей автономной обыкновенной дифференциальной системы) и 2.2D.

Пример 1. Используя первый признак ограниченности числа возможных компактных интегральных гиперповерхностей (теорема 1.2D), докажем, что автономная обыкновенная дифференциальная система третьего порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3 g(x),\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_3 + x_2 g(x),\ \frac{dx_3}{dt} = -x_2 - x_1 g(x), \quad (2)$$

где $g\colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,$ имеет одну компактную интегральную гиперповерхность в области $\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}.$

Предварительно устанавливаем, что сфера $S^2 = \{x\colon w(x) = 0\},$ где $w\colon x \to g(x) - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,$ является компактной интегральной гиперповерхностью системы (2):

$$\frac{dw}{dt}\Big|_{(2)} = 2x_2^2\, w(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

На основании обыкновенной дифференциальной системы (2) составим уравнение Пфаффа

$$\chi_{12}(x) = 0,$$

где

$$\chi_{12}(x) = x_3 g(x)\, dx_2 - \big(-x_2 + x_3 + x_2 g(x)\big)\, dx_1,\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Непрерывно дифференцируемая на области $\mathcal{X}_0$ 1-форма

$$\omega(x) = -\frac{1}{g(x)}\, dx_1,\ \ \forall x \in \mathcal{X}_0,$$

такова, что внешний дифференциал внешнего произведения

$$d\big(\chi_{12}(x) \wedge \omega(x)\big) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\ \forall x \in \mathcal{X}_0.$$

Поэтому в соответствии с теоремой 1.2D в области $\mathcal{X}_0$ с гомотопической группой $\pi_2(\mathcal{X}_0)$ ранга $d(\pi_2(\mathcal{X}_0)) = 1$ система (2) может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности. Таковой является ранее указанная сфера S^2.

На основании первого признака ограниченности числа возможных компактных интегральных гиперповерхностей автономной обыкновенной дифференциальной системы (теорема 1.2D) докажем следующую закономерность, когда ограниченность числа возможных компактных интегральных гиперповерхностей устанавливается по виду системы (AD), не прибегая к представлению её системой уравнений Пфаффа (1).

Теорема 1. *Пусть область* $\mathcal{X}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ *ранга* $d\big(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\big) = r$ *и существует непрерывно дифференцируемая на области* $\mathcal{X}$ *скалярная функция* $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *такая, что у векторного поля* $Z\colon x \to \varphi(x)f(x),\ \forall x \in \mathcal{X}$, *расходимость* $\operatorname{div} Z$ *знакопостоянна на области* $\mathcal{X}$. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная автономная обыкновенная дифференциальная система* (AD) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей.*

Доказательство. Следуя теореме 1.2D, в качестве 1-форм $\ell_i,\ i=\overline{1,n}$, возьмём

$$\ell_\nu(x) = f_\nu(x)\,dx_{\nu+1} - f_{\nu+1}(x)\,dx_\nu,\ \nu=\overline{1,n-1}\,,$$

$$\ell_n(x) = f_n(x)\,dx_1 - f_1(x)\,dx_n,\ \forall x\in\mathcal{X},$$

а в качестве $(n-2)$-форм $\omega_i,\ i=\overline{1,n}$, возьмём

$$\omega_\nu(x) = 2^{-1}\varphi(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{\nu-1}\wedge dx_{\nu+2}\wedge dx_{\nu+3}\wedge\ldots\wedge dx_n,$$

$$\nu=\overline{1,n-1}\,,\ \omega_n(x) = (-1)^{n+1}2^{-1}\varphi(x)\,dx_2\wedge\ldots\wedge dx_{n-1},\ \forall x\in\mathcal{X},$$

где скалярная функция $\varphi\in C^1(\mathcal{X})$. Тогда на области $\mathcal{X}$ сумма внешних произведений

$$\sum_{i=1}^{n}\ell_i(x)\wedge\omega_i(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge dx_{i+2}\wedge\ldots\wedge dx_n$$

и внешний дифференциал

$$d\Big(\varphi(x)\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\wedge\omega_i(x)\Big) = \operatorname{div} Z(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n,\ \forall x\in\mathfrak{X}.$$

По теореме 1.2D, заключаем о справедливости теоремы 1. ■

Заметим, что теорема 1 является следствием и теоремы 3.2 на случай голоморфной автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD).

Это следует из того, что векторное поле

$$B\colon x\to\varphi(x)f(x),\ \forall x\in\mathfrak{X},$$

ортогонально на области $\mathfrak{X}$ векторным полям

$$\big(0,\ldots,0,-f_h(x),0,\ldots,0,f_q(x),0,\ldots,0\big),\forall x\in\mathfrak{X},\ 1\leqslant q<h\leqslant n,$$

ассоциированным с дифференциальными формами χ_{qh}.

Поэтому теорему 1 назовём вторым признаком ограниченности числа возможных компактных интегральных гиперповерхностей автономной обыкновенной дифференциальной системы.

При $n=2$ в области $\mathfrak{X}$ с фундаментальной группой $\pi_1(\mathfrak{X})$ рангов $d(\pi_1(\mathfrak{X}))=0$ и $d(\pi_1(\mathfrak{X}))=1$ теорема 1 соответствует признакам Дюлака отсутствия (когда $d(\pi_1(\mathfrak{X}))=0$) и возможности наличия не более одной (когда $d(\pi_1(\mathfrak{X}))=1$) замкнутой кривой, составленой из траекторий системы (AD) при $n=2$ [8, с. 120; 69, с. 226 − 229].

Для автономной дифференциальной системы второго порядка

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{3}$$

с голоморфными на области $\mathfrak{X}$ из плоскости $\mathbb{R}^2$ правыми частями $P\colon\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ и $Q\colon\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ следствием теоремы 1.2D является

Теорема 2. *Пусть плоская область $\mathfrak{X}$ будет $(r+1)$-связной и существуют непрерывно дифференцируемая на области $\mathfrak{X}$ функция $\omega\colon\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$, дважды непрерывно дифференцируемая на области $\mathfrak{X}$ функция $\alpha\colon\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$, такая, что функция*

$$p_1\colon (x,y)\to \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,\partial_x\alpha(x,y)\ \ \Big(p_2\colon (x,y)\to \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}\,\partial_y\alpha(x,y)\Big)$$

на области $\mathcal{X}$ *непрерывно дифференцируема, а функция*

$$q_1\colon (x,y)\to \partial_x\big(p(x,y)+\partial_y\alpha(x,y)\big)+\operatorname{div}A(x,y),\ \mathrm{D}q_1=\mathcal{X}, \quad (4)$$

$$\Big(q_2\colon (x,y)\to -\partial_y\big(\partial_x\alpha(x,y)+q(x,y)\big)+\operatorname{div}A(x,y), \mathrm{D}q_2=\mathcal{X}\Big), \ (5)$$

знакопостоянна на $\mathcal{X}$, *где непрерывно дифференцируемое на* $\mathcal{X}$ *векторное поле* $A(x,y)=\omega(x,y)(P(x,y),Q(x,y))$. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *может быть расположено не более* r *простых замкнутых кривых, составленных из траекторий системы* (3).

Действительно,

$$d\alpha(x,y)\big|_{(3)}=\Big(\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,\partial_x\alpha(x,y)+\partial_y\alpha(x,y)\Big)\,dy,\ \forall (x,y)\in\mathcal{X},$$

и

$$d\alpha(x,y)\big|_{(3)}=\Big(\partial_x\alpha(x,y)+\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}\,\partial_y\alpha(x,y)\Big)\,dx,\ \forall (x,y)\in\mathcal{X}.$$

Тогда, соответственно, внешний дифференциал

$$d\big(d\alpha(x,y)\big|_{(3)}+\omega(x,y)\big(P(x,y)\,dy-Q(x,y)\,dx\big)\big)=$$

$$=\bigg(\partial_x\Big(\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,\partial_x\alpha(x,y)+\partial_y\alpha(x,y)\Big)+\partial_x\big(\omega(x,y)P(x,y)\big)+$$

$$+\,\partial_y\big(\omega(x,y)Q(x,y)\big)\bigg)\,dx\wedge dy,\ \forall (x,y)\in\mathcal{X},$$

и

$$d\big(d\alpha(x,y)\big|_{(3)}+\omega(x,y)\big(P(x,y)\,dy-Q(x,y)\,dx\big)\big)=$$

$$= \Big(-\partial_y \Big(\partial_x \alpha(x,y) + \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\, \partial_y \alpha(x,y) \Big) + \partial_x \big(\omega(x,y) P(x,y) \big) +$$

$$+ \partial_y \big(\omega(x,y) Q(x,y) \big) \Big)\, dx \wedge dy, \ \forall (x,y) \in \mathcal{X}.$$

По теореме 1.2D заключаем о справедливости теоремы 2. ■

На случай замкнутых кривых, являющихся предельными циклами системы (3), теоремы 2 справедлива для системы (3) с непрерывно дифференцируемыми на области $\mathcal{X}$ правыми частями P и Q, ввиду того, что предельные циклы как замкнутые (а не только компактные) траектории определяются периодическими решениями системы (3). (ср. с [107]).

Для систем (AD) особый интерес представляют изолированные компактные регулярные интегральные гиперповерхности, то есть, такие компактные интегральные гиперповерхности, на которых нет состояний равновесия системы (AD).

Теорема 3 (*признак ограниченности числа изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей обыкновенной дифференциальной системы*). *Пусть область* $\mathcal{X}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ *ранга* $d\big(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\big) = r$ *и существует такая голоморфная знакоопределенная на* $\mathcal{X}$ *функция* $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, *что векторное поле*

$$h\colon x \to g(x) f(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{6}$$

является соленоидальным на $\mathcal{X}$. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная автономная обыкновенная дифференциальная система* (AD) *может иметь не более* r *изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.*

Доказательство этой теоремы согласуется с доказательством теоремы 1.1.1 при $\nu = n$ и основано на следующей

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда во всякой подобласти* Ω *области* $\mathcal{X}$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\Omega)$ *ранга* $d\big(\pi_{n-1}(\Omega)\big) = s$ *при* $s \leqslant r$ *относительно изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей голоморфной системы* (AD) *невозможна ситуация, описанная в лемме* 1.1.

Доказательство. Прежде всего отметим следующий факт.

Поскольку голоморфная функция g является знакоопределённой на области $\mathcal{X}$, то имеет место закономерность: если система (AD) в области $\mathcal{X}$ имеет компактную регулярную интегральную гиперповерхность, то автономная обыкновенная дифференциальная система, определяющая векторное поле (6), имеет ту же компактную регулярную интегральную гиперповерхность.

Допустим противное: описанная в лемме 1.1 ситуация относительно изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей $\partial\Sigma_1, \ldots, \partial\Sigma_{s+1}$ системы (AD) имеет место. Так как $\partial\Sigma_{s+1}$ — изолированная компактная регулярная интегральная гиперповерхность системы (AD), то снаружи при $t \to +\infty$ траектории системы (AD) стремится к $\partial\Sigma_{s+1}$ (удаляются от $\partial\Sigma_{s+1}$) и существует такая гиперповерхность $\partial\Xi$, диффеоморфная гиперповерхности $\partial\Sigma_{s+1}$, что через неё траектории входят в область (выходят из области), ограниченную гиперповерхностями $\partial\Xi$ и $\partial\Sigma_{s+1}$. Поэтому

$$\int\limits_{\partial\Xi} g(x)f(x)\cdot\vec{n}(x)\,dS + \sum_{\tau=1}^{s}\ \int\limits_{\partial\Sigma_\tau} g(x)f(x)\cdot\vec{n}(x)\,dS \neq 0,$$

где $\vec{n}$ — внешнее нормальное единичное поле.

Но, с другой стороны, в силу соленоидальности на области $\mathcal{X}$ векторного поля (6) имеем:

$$\int\limits_{\partial\Xi} g(x)f(x)\cdot\vec{n}(x)\,dS + \sum_{\tau=1}^{s}\ \int\limits_{\partial\Sigma_\tau} g(x)f(x)\cdot\vec{n}(x)\,dS =$$

$$= \int\limits_{\Xi} \operatorname{div}\big(g(x)f(x)\big)\,d\Xi = 0,$$

где область Ξ ограничена гиперповерхностью $\partial\Xi \cup \Big(\bigcup\limits_{\tau=1}^{s}\partial\Sigma_\tau\Big)$.

Полученное противоречие и доказывает лемму 1. ■

Из теорем 1 (при $\varphi(x) = 1,\ \forall x \in \mathcal{X}$) и 3 получаем

Следствие 1. *Линейная автономная обыкновенная дифференциальная система не имеет изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.*

4. Автономная система уравнений в полных дифференциалах

Признаки ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей.

Автономная система уравнений в полных дифференциалах (ACD) индуцирует m автономных обыкновенных дифференциальных систем n-го порядка (ADj), $j=\overline{1,m}$.

Непрерывно дифференцируемая на области $\mathcal{X}$ скалярная функция векторного аргумента $w\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$ является автономным частным интегралом системы (ACD) тогда и только тогда, когда имеет место система тождеств

$$\mathfrak{r}_j(x)w(x)=\Phi_j(x),\ \forall x\in\mathcal{X},\ j=\overline{1,m}\,, \tag{1}$$

где функции $\Phi_j\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R},\ j=\overline{1,m}$, таковы, что

$$\Phi_j(x)\big|_{w(x)=0}=0,\ j=\overline{1,m}\,. \tag{2}$$

Выполнение k-го тождества системы (1) при условии (2), когда $j=k$, равносильна наличию автономного частного интеграла $w\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$ у системы (ADk).

Это позволяет сделать следующие выводы.

Теорема 1 (*первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы уравнений в полных дифференциалах*). *Пусть существует номер* $j\in\{1,\ldots,m\}$ *такой, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы* (ADj) *выполняются условия теоремы* 1.2D. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная автономная система уравнений в полных дифференциалах* (ACD) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей.*

Теорема 2. *Пусть существует такой номер* $j\in\{1,\ldots,m\}$, *что для автономной обыкновенной дифференциальной системы* (ADj) *выполняются условия теоремы* 2.2D. *Тогда*:

1) *в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная автономная система уравнений в полных дифференциалах* (ACD) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей*;

2) *всякое множество лакун области* $\mathcal{X}$, *содержащих-*

ся внутри компактной интегральной гиперповерхности автономной системы (ACD)*, имеет нулевой суммарный индекс относительно* $(n-1)$*-формы* $d\theta$ *.*

Теорема 3 (*второй признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы уравнений в полных дифференциалах*). *Пусть область* $\mathcal{X}$ *из* $\mathbb{R}^n$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ *ранга* $d\bigl(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\bigr) = r$, *существует номер* $j \in \{1,\ldots,m\}$, *что для автономной обыкновенной дифференциальной системы* (ADj) *найдётся непрерывно дифференцируемая на* $\mathcal{X}$ *функция* $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *такая, что у векторного поля*

$$Z_j\colon x \to \varphi(x)X^j(x),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

расходимость $\operatorname{div} Z_j$ *знакопостоянна на области* $\mathcal{X}$*. Тогда в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная автономная система уравнений в полных дифференциалах* (ACD) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей.*

Пример 1. Для системы уравнений в полных дифференциалах

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= x_3 \prod_{k=0}^{n} (g(x)-2k)\,dt_1 + x_2\,dt_2,\\
dx_2 &= \Bigl(x_3 + x_2 \prod_{k=0}^{n} (g(x)-2k)(g(x)-2k-1)\Bigr)dt_1 + (-x_1+x_3)\,dt_2,\\
dx_3 &= \Bigl(-x_2 - x_1 \prod_{k=0}^{n} (g(x)-2k)\Bigr)dt_1 + \\
&\quad + \Bigl(-x_2 + x_3 \prod_{k=0}^{n} (g(x)-2k)(g(x)-2k-1)\Bigr)dt_2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $g\colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,$ ввиду того, что

$$d\bigl(g(x)-m\bigr)\big|_{(3)} = \prod_{k=0}^{n} (g(x)-2k)(g(x)-2k-1)(x_2^2\,dt_1 + x_3^2\,dt_2),$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^5,\ m = \overline{1, 2n+1}\,,$$

каждая сфера $S_m^2 = \{x\colon g(x) = m\}$, $m = \overline{1, 2n+1}$, является компактной интегральной гиперповерхностью.

На основании автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD1), индуцированной системой (3), построим уравнение Пфаффа

$$\chi_{12}(x) = 0,$$

где

$$\chi_{12}(x) = -\Bigl(x_3 + x_2 \prod_{k=0}^{n} (g(x) - 2k)(g(x) - 2k - 1)\Bigr)\, dx_1 +$$

$$+\, x_3 \prod_{k=0}^{n} (g(x) - 2k)\, dx_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Линейная дифференциальная форма

$$\omega(x) = -\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{g(x) - 2k}\, dx_1, \ \forall x \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathfrak{X}_k,$$

$$\mathfrak{X}_\tau = \{x\colon 2\tau < g(x) < 2(\tau+1)\}, \ \tau = \overline{0, n-1},$$

$$\mathfrak{X}_n = \{x\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 2n\},$$

такова, что внешний дифференциал

$$d\bigl(\chi_{12}(x) \wedge \omega(x)\bigr) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \ \forall x \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathfrak{X}_k.$$

Следовательно, по теореме 1 в каждой из областей $\mathfrak{X}_k$, $k = \overline{0, n}$, с гомотопическими группами $\pi_2(\mathfrak{X}_k)$ ранга $d\bigl(\pi_2(\mathfrak{X}_k)\bigr) = 1$, $k = \overline{0, n}$, система уравнений в полных дифференциалах (3) может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

В итоге получаем, что система уравнений в полных дифференциалах (3) имеет $2n+1$ компактных интегральных гиперповерхностей, каковыми являются ранее указанные сферы S_m^2, $m = \overline{1, 2n+1}$.

В случае вполне разрешимой системы (IACD) из всего множества её интегральных гиперповерхностей будем выделять регулярные, то есть, такие, на которых нет сингулярных точек этой системы.

Теорема 4 (*признак ограниченности числа изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах*). *Пусть область* $\mathcal{X}$ *из пространства* $\mathbb{R}^n$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ *ранга* $d\bigl(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\bigr) = r$, *существуют голоморфные знакоопределённые на области* $\mathcal{X}$ *функции* $g_j\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, *такие, что векторные поля*

$$Y_j\colon x \to g_j(x)X^j(x),\ \forall x \in \mathcal{X},\ j = \overline{1,m}\,,$$

являются соленоидальными на $\mathcal{X}$. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *вполне разрешимая голоморфная автономная система уравнений в полных дифференциалах* (IACD) *может иметь не более* r *изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.*

Доказательство базируется на теореме 3.3 и следует из такого вполне очевидного факта: наличие одной и той же изолированной компактной интегральной гиперповерхности у каждой автономной обыкновенной дифференциальной системы (ADj), $j = \overline{1,m}$, влечёт за собой то, что эта гиперповерхность является изолированной интегральной и для системы (ACD). ■

На основании системы тождеств (1) при условиях (2), следствия 1.3, теорем 1 и 4 получаем такую закономерность.

Следствие 1. *Линейная вполне разрешимая автономная система уравнений в полных дифференциалах не имеет изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.*

5. Линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных

Признаки ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей.

Линейная однородная дифференциальная система в частных производных (∂ACD) индуцирует m автономных обыкновенных дифференциальных систем n-го порядка (ADj), $j = \overline{1,m}$, которые составляют систему характеристик системы (∂ACD).

Поэтому непрерывно дифференцируемая на области $\mathcal{X}$ скалярная функция векторного аргумента $w\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ является частным интегралом (частным решением) системы (∂ACD), если и только если имеет место система тождеств (1.4) при уловиях (2.4).

Выполнение k-го тождества системы (1.4) при условии (2.4), когда $j = k$, равносильно наличию автономного частного интеграла $w\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ у автономной обыкновенной дифференциальной системы (ADk).

Это позволяет сделать следующие выводы.

Теорема 1 (*первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей линейной однородной системы уравнений в частных производных*). *Пусть существует такой номер* $j \in \{1, \ldots, m\}$, *что для автономной обыкновенной дифференциальной системы* (ADj) *выполняются условия теоремы* 1.2D. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных* (∂ACD) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей.*

Теорема 2. *Пусть существует номер* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *такой, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы* (ADj) *выполняются условия теоремы* 2.2D. *Тогда*:

1) *в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных* (∂ACD) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей*;

2) *всякое множество лакун области* $\mathcal{X}$, *содержащихся внутри компактной интегральной гиперповерхности системы* (∂ACD), *имеет нулевой суммарный индекс относительно* $(n-1)$*-формы* $d\theta$.

Теорема 3 (*второй признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей линейной однородной системы уравнений в частных производных*). *Пусть область* $\mathcal{X}$ *из арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ *ранга* $d\bigl(\pi_{n-1}(\mathcal{X})\bigr) = r$, *существует номер* $j \in \{1, \ldots, m\}$, *такой, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы* (ADj) *найдётся непрерывно дифференцируемая на области* $\mathcal{X}$ *функция* $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, *такая, что у векторного поля*

$$Z_j\colon x \to \varphi(x) X^j(x),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

расходимость $\operatorname{div} Z_j$ *знакопостоянна на области* $\mathcal{X}$. *Тогда в области* $\mathcal{X}$ *голоморфная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных* (∂ACD) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей.*

Пример 1. Для голоморфной линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных

$$x_2 g(x)\partial_{x_1} y + \big(x_3 - x_1 g(x)\big)\partial_{x_2} y + \big(- x_1 - x_2 + x_1 g(x)\big)\partial_{x_3} y = 0,$$

$$\big(-x_2+x_3+x_2 g(x)\big)\partial_{x_1} y+\big(x_1-x_1 g(x)\big)\partial_{x_2} y+\big(-x_1-x_2+x_2 g(x)\big)\partial_{x_3} y = 0,$$

где $g\colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,$ сфера $S^2 = \{x\colon g(x) = 1\}$ является компактной интегральной гиперповерхностью.

Рассмотрим автономную обыкновенную дифференциальную систему (AD1), индуцированную данной системой.

На основании этой системы составляем уравнение Пфаффа

$$\chi_{13}(x) = 0,$$

где

$$\chi_{13}(x) = x_2 g(x)\, dx_3 - \big(- x_1 - x_2 + x_1 g(x)\big)\, dx_1,\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Непрерывно дифференцируемая на $\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ 1-форма

$$\omega(x) = \frac{1}{g(x)}\, dx_1,\ \forall x \in \mathcal{X}_0,$$

такова, что внешний дифференциал внешнего произведения

$$d\big(\chi_{13}(x) \wedge \omega(x)\big) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\ \forall x \in \mathcal{X}_0.$$

Поэтому, в соответствии с теоремой 1 в области $\mathcal{X}_0$ с гомотопической группой $\pi_2(\mathcal{X}_0)$ ранга $d(\pi_2(\mathcal{X}_0)) = 1$ линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности. Таковой является ранее указанная сфера S^2.

Пример 2. Для голоморфной линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных

$$\big(- x_1 + x_2 + x_1 g(x)\big)\partial_{x_1} y + \big(- x_1 - x_2 + x_2 g(x)\big)\partial_{x_2} y +$$

$$+ \big(- x_3 + x_3 g(x)\big)\partial_{x_3} y = 0,$$

$$\big(-x_2+x_3+x_2g(x)\big)\partial_{x_1}y+\big(x_1-x_1g(x)\big)\partial_{x_2}y+$$
$$+\big(-x_1-x_2+x_2g(x)\big)\partial_{x_3}y=0,$$

где скалярная функция

$$g\colon x\to x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^3,$$

сфера $S^2=\{x\colon g(x)=1\}$ является компактной интегральной гиперповерхностью.

Рассмотрим автономную обыкновенную дифференциальную систему (AD1), индуцированную данной системой. Пусть

$$\varphi\colon x\to g^{-\frac{5}{2}}(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}.$$

Тогда для векторного поля

$$Z_1\colon x\to\varphi(x)X^1(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\},$$

расходимость $\operatorname{div}Z_1$ знакоположительна на области $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$.

Учитывая, что ранг $d(\pi_2(\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}))=1$, по теореме 3 заключаем, что выделенная сфера S^2 является единственной компактной интегральной гиперповерхностью линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных, расположенной в области $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$.

§3. Алгебраически вложимые системы уравнений в полных дифференциалах

В монографии [81] В.И. Мироненко разработана методика исследования обыкновенных дифференциальных систем, для каждого решения которых одна или несколько составляющих являются решениями линейных систем с постоянными коэффициентами. Такие системы были названы вложимыми. Дифференциальные системы, для каждого решения которых одна или несколько составляющих являются решениями алгебраических дифференциальных систем с постоянными коэффициентами, естественно отнести к алгебраически вложимым. Многие задачи, решённые для вложимых обыкновенных дифференциальных систем, в своей основе разрешаются и в случае алгебраической вложимости. Особо суть алгебраической вложимости выкристаллизовывается в многомерном случае, когда переходим от рассмотрения обыкновенных дифференциальных систем к системам уравнений в полных дифференциалах.

1. Алгебраическая вложимость

Дифференциальные операторы, алгебраически независимые в силу системы уравнений в полных дифференциалах. Достаточные условия расположения орбит на алгебраическом многообразии. q-алгебраически и p-сильно q-алгебраически вложимые системы уравнений в полных дифференциалах. Алгебраические многообразия, на которых расположены орбиты алгебраически вложимых систем уравнений в полных дифференциалах.

Рассмотрим автономную вполне разрешимую систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = R(x)\,dt, \tag{1}$$

когда элементами матрицы $R(x) = \|R_{ij}(x)\|, \forall x \in \mathcal{X}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, размера $n \times m$ являются рациональные функции $R_{ij} \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, относительно x над полем $\mathbb{R}$, считая $m < n$.

На основании системы (1) построим функции

$$S_{i0\dots 0}^{(0)}\colon x\to x_i,\quad S_{i10\dots 0}^{(1)}\colon x\to R_{i1}(x),$$

$$S_{i010\dots 0}^{(1)}\colon x\to R_{i2}(x),\ \dots,\ S_{i0\dots 01}^{(1)}\colon x\to R_{im}(x), \tag{2}$$

$$S_{i20\dots 0}^{(2)}\colon x\to \sum_{\tau=1}^{n} R_{\tau 1}(x)\partial_{x_\tau} R_{i1}(x),\ \dots,\ \forall x\in\mathcal{X},\ i=\overline{1,n}\,.$$

Пусть $x\colon t\to x(t)$, $\forall t\in\mathcal{T}$, есть решение на области $\mathcal{T}$ из пространства $\mathbb{R}^m$ системы (1). Тогда

$$\partial^{\nu_{ilk\xi}} x(t)=S_{i\nu_{ilk\xi}}^{(\beta_{ilk\xi})}(x(t)),\ \forall t\in\mathcal{T},\ i=\overline{1,n}\,, \tag{3}$$

где $\partial^{\nu_{ilk\xi}}=\partial_{t_1}^{\nu_{1ilk\xi}}\partial_{t_2}^{\nu_{2ilk\xi}}\dots\partial_{t_m}^{\nu_{milk\xi}}$ есть оператор дифференцирования по переменным t_j соответственно порядков $\nu_{jilk\xi}$, $\nu_{ilk\xi}=(\nu_{1ilk\xi},\dots,\nu_{milk\xi})$, числа $\beta_{ilk\xi}$ и $\nu_{jilk\xi}$ — целые неотрицательные, $j=\overline{1,m}\,$, $i=\overline{1,n}\,$, $l=\overline{1,r_{k\xi}}\,$, $k=\overline{0,s_\xi}\,$, $\xi=\overline{1,q}\,$.

Введём дифференциальные операторы

$$\mathfrak{L}_\xi(t)=\sum_{k=0}^{s_\xi} a_{k\xi}\prod_{l=1}^{r_{k\xi}}\prod_{i\in I}\left(\partial^{\nu_{ilk\xi}}\right)^{\mu_{ilk\xi}},\ \forall t\in\mathbb{R}^m,\ \xi=\overline{1,q}\,, \tag{4}$$

с постоянными коэффициентами $a_{k\xi}$ из поля $\mathbb{R}$, где $\mu_{ilk\xi}$ — целые неотрицательные числа, $i\in I$, $I=\{i_1,\dots,i_q\}\subset\{1,\dots,n\}$, $l=\overline{1,r_{k\xi}}\,$, $k=\overline{0,s_\xi}\,$, $\xi=\overline{1,q}\,$.

Будем говорить, что дифференциальные операторы $\mathfrak{L}_\xi$, $\xi=\overline{1,q}\,$, *алгебраически независимы на области* $\mathcal{T}$ *в силу системы* (1), если функции

$$L_\xi\colon x\to\sum_{k=0}^{s_\xi} a_{k\xi}\prod_{l=1}^{r_{k\xi}}\prod_{i\in I}\left(S_{i\nu_{ilk\xi}}^{(\beta_{ilk\xi})}(x)\right)^{\mu_{ilk\xi}},\ \forall x\in\mathcal{X},\ \xi=\overline{1,q}\,, \tag{5}$$

являются алгебраически независимыми[7] на области $\mathcal{X}$.

Теорема 1. *Пусть у автономной вполне разрешимой системы* (1) *существуют решения*:

1) $x\colon t \to \varphi(t),\ \forall t \in \mathcal{T},$ *такое, что векторная функция векторного аргумента* $u\colon t \to \bigl(\varphi_{i_1}(t), \ldots, \varphi_{i_q}(t)\bigr),\ \forall t \in \mathcal{T},$ *координаты которой суть составляющие* $x_i\colon t \to \varphi_i(t),$ $\forall t \in \mathcal{T},\ i \in I,$ *решения* $x\colon t \to \varphi(t),\ \forall t \in \mathcal{T},$ *является решением алгебраической системы уравнений в частных производных*

$$\mathfrak{L}_\xi(t)u = 0,\ \xi = \overline{1,q}\,, \tag{6}$$

построенной на основании алгебраически независимых на области $\mathcal{T}$ *в силу системы* (1) *дифференциальных операторов* (4);

2) $x\colon t \to \psi(t),\ \forall t \in \mathcal{T},$ *такое, что векторная функция векторного аргумента* $u\colon t \to \bigl(\psi_{i_1}(t), \ldots, \psi_{i_q}(t)\bigr),\ \forall t \in \mathcal{T},$ *координаты которой суть составляющие* $x_i\colon t \to \psi_i(t),$ $\forall t \in \mathcal{T},\ i \in I,$ *решения* $x\colon t \to \psi(t),\ \forall t \in \mathcal{T},$ *не является решением дифференциальной системы* (6).

Тогда орбита системы (1), *соответствующая решению* $x\colon t \to \varphi(t),\ \forall t \in \mathcal{T},$ *расположена на построенном с помощью функций* (2) *и* (5) *алгебраическом многообразии*

$$\bigl\{x\colon L_\xi(x) = 0,\ \xi = \overline{1,q}\,\bigr\}. \tag{7}$$

Доказательство. Вдоль любого решения $x\colon t \to x(t), \forall t \in \mathcal{T},$ вполне разрешимой системы (1) функции (2) с производными этого решения связаны тождествами (3). Поэтому для решения $x\colon t \to \varphi(t),\ \forall t \in \mathcal{T},$ системы (1), удовлетворяющего условию 1) доказываемой теоремы, имеет место система тождеств

$$L_\xi(\varphi(t)) = 0,\ \forall t \in \mathcal{T},\ \xi = \overline{1,q}\,. \tag{8}$$

[7]Под *алгебраической зависимостью* на области $\mathcal{X}$ из пространства $\mathbb{R}^n$ функций $f_\tau : \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ \tau = \overline{1,p}\,,$ будем понимать существование такого полинома $P\colon \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^p,$ с коэффициентами из $\mathbb{R},$ что $P(f_1(x), \ldots, f_p(x)) = 0,$ $\forall x \in \mathcal{X}.$ В противном случае функции $f_\tau,\ \tau = \overline{1,p}\,,$ будем называть *алгебраически независимыми* на области $\mathcal{X}$.

При этом согласно условию 2) система тождеств (8) выполняется не для всех решений $x\colon t\to x(t),\ \forall t\in\mathcal{T},$ системы (1).

Поэтому орбита системы (1), соответствующая решению $x\colon t\to \varphi(t),\ \forall t\in\mathcal{T},$ расположена на алгебраическом многообразии (7). Это обосновано тем, что в противном случае имеет место система тождеств

$$L_{\xi}(x)=0,\ \forall x\in\mathcal{X},\ \xi=\overline{1,q}\,, \tag{9}$$

что противоречит наличию решения $x\colon t\to \psi(t), \forall t\in\mathcal{T},$ у системы (1) со свойством, предусмотренным условием 2). ■

Пример 1. Вполне разрешимая система [1, с.48]

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,dt_1-2x_1x_2\,dt_2,\\ dx_2 &= -2x_1x_2dt_1+(x_1^2-x_2^2+x_3^2)dt_2,\\ dx_3 &= -2x_1x_3\,dt_1-2x_2x_3\,dt_2, \end{aligned} \tag{10}$$

такова, что у каждого из её решений

$$x_1\colon (t_1,t_2)\to\frac{t_1}{t_1^2+t_2^2+C^2}\,,\quad x_2\colon (t_1,t_2)\to\frac{t_2}{t_1^2+t_2^2+C^2}\,,$$

$$x_3\colon (t_1,t_2)\to\frac{C}{t_1^2+t_2^2+C^2},\ \forall (t_1,t_2)\in\mathcal{T},$$

где $\mathcal{T}\subset\{(t_1,t_2)\colon t_1^2+t_2^2+C^2\neq 0\},$ компонента x_3 является решением алгебраического уравнения в частных производных

$$uu_{t_1t_1}-2u_{t_1}^2+\frac{2}{C}\,u^3=0.$$

В силу теоремы 1 соответствующая каждому из этих решений при $C\neq 0$ орбита системы (10) расположена на алгебраическом многообразии

$$\Big\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_3^2\Big(x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{x_3}{C}\Big)=0\Big\},$$

что устанавливаем вычислениями с учётом того, что

$$u=x_3,\ \ u_{t_1}=-2x_1x_3,\ \ u_{t_1t_1}=2x_3(3x_1^2-x_2^2-x_3^2).$$

Достаточные условия того, что орбиты системы (1) расположены на алгебраическом многообразии, могут быть получены на основании понятия алгебраической вложимости.

Определение 1. *Автономную вполне разрешимую систему уравнений в полных дифференциалах* (1) *назовём* ***q-алгебраически вложимой,*** $q \leqslant n$, *если соответственно для каждого решения* $x\colon t \to x(t), \forall t \in \mathcal{T}$, *этой системы можно указать алгебраическую систему уравнений в частных производных* (6), *построенную на основании алгебраически независимых на области* $\mathcal{T}$ *в силу системы* (1) *дифференциальных операторов* (4), *решением которой будет векторная функция векторного аргумента*

$$u\colon t \to \bigl(x_{i_1}(t), \ldots, x_{i_q}(t)\bigr), \ \forall t \in \mathcal{T},$$

с координатными функциями $x_i, i \in I$, *являющимися составляющими решения* x.

Определение 2. *Автономную вполне разрешимую систему уравнений в полных дифференциалах* (1) *назовём* ***p-сильно q-алгебраически вложимой,*** $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$, *если она является* q*-алгебраически вложимой и для всех её решений* $x\colon t \to x(t), \forall t \in \mathcal{T}$, *можно указать одну алгебраическую систему* p *уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами*

$$\mathfrak{L}_{\xi_\theta}(t)u = 0, \ \theta = \overline{1,p}\,, \ \ (1 \leqslant \xi_\theta \leqslant q, \, \theta = \overline{1,p}\,,),$$

решениями которой будут векторные функции векторного аргумента $u\colon t \to \bigl(x_{i_1}(t), \ldots, x_{i_q}(t)\bigr), \forall t \in \mathcal{T}$, *с координатными функциями* x_i, $i \in I$, *являющимися составляющими решений* x.

Теорема 2. *Если автономная вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах* (1) p*-сильно* q*-алгебраически вложима,* $0 \leqslant p \leqslant q-1$, *то её орбиты расположены на алгебраических многообразиях.*

Действительно, в соответствии с определением 1 для каждого решения $x\colon t \to x(t), \forall t \in \mathcal{T}$, системы (1) существуют числа $a_{k\xi} \in \mathbb{R}$ и $\nu_{jilk\xi} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu_{ilk\xi} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = \overline{0, s_\xi}\,, \xi = \overline{1,q}\,,$

$j=\overline{1,m}\,,\ i\in I,\ l=\overline{1,r_{k\xi}}\,,$ такие, что

$$L_\xi(x(t))=0,\ \forall t\in\mathcal{T},\ \xi=\overline{1,q}\,. \tag{11}$$

Если хотя бы одно из тождеств (11) не является общим тождеством для всех решений $x\colon t\to x(t),\ \forall t\in\mathcal{T},$ системы (1), то орбита системы (1) расположена на алгебраическом многообразии

$$\bigl\{x\colon L_\xi(x)=0,\ \xi\in\{1,\ldots,q\}\bigr\}. \tag{12}$$

Это обосновано тем, что в противном случае все равенства $L_\xi(x)=0,\ \xi=\overline{1,q}\,,$ на области $\mathcal{X}$ обращаются в тождества (9), что соответствует q-сильной q-алгебраически вложимости системы (1). ■

Доказательство теоремы 2 является и доказательством следующей закономерности.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*:

1) *система* (1) *p-сильно q-алгебраически* $(0\leqslant p\leqslant q-1)$ *вложима по компонентам* $x_i,\ i\in I$;

2) *существует такое решение* $x\colon t\to\varphi(t),\ \forall t\in\mathcal{T},$ *системы* (1), *что вектор-функция*

$$u\colon t\to\bigl(\varphi_{i_1}(t),\ldots,\varphi_{i_q}(t)\bigr),\ \forall t\in\mathcal{T},$$

координаты которой суть составляющие

$$x_i\colon t\to\varphi_i(t),\ \forall t\in\mathcal{T},\ i\in I,$$

решения $x\colon t\to\varphi(t),\ \forall t\in\mathcal{T},$ *является решением системы уравнений в частных производных* (6);

3) *существует такое решение* $x\colon t\to\psi(t),\ \forall t\in\mathcal{T},$ *системы* (1), *что вектор-функция*

$$u\colon t\to\bigl(\psi_{i_1}(t),\ldots,\psi_{i_q}(t)\bigr),\ \forall t\in\mathcal{T},$$

координаты которой суть составляющие

$$x_i\colon t\to\psi_i(t),\ \forall t\in\mathcal{T},\ i\in I,$$

решения $x\colon t\to\psi(t),\ \forall t\in\mathcal{T},$ *не является решением системы уравнений в частных производных* (6).

Тогда соответствующая решению $x\colon t \to \varphi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, *орбита системы* (1) *расположена на алгебраическом многообразии* (12), *построенном с помощью функций* (2) *и* (5).

Методом, аналогичным использованному при доказательстве теорем 1, 2 и 3, для не являющихся p-сильно q-алгебраически вложимыми систем (1) устанавливаем следующее свойство.

Теорема 4. *Пусть автономная вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах* (1) *не является* p*-сильно* q*-алгебраически вложимой,* $0 \leqslant p \leqslant q$, *по компонентам* x_i, $i \in I$, *и пусть существует решение* $x\colon t \to x(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, *системы* (1), *такое, что функция*

$$u\colon t \to \left(x_{i_1}(t), \ldots, x_{i_q}(t)\right),\ \forall t \in \mathcal{T},$$

координаты которой суть составляющие x_i, $i \in I$, *решения* x, *будет решением системы* (6). *Тогда орбита системы* (1), *соответствующая решению* x, *расположена на алгебраическом многообразии* (12), *построенном с помощью функций* (2) *и* (5).

2. Компактные регулярные орбиты алгебраически вложимых систем

Алгебраически вложимые системы, не имеющие изолированных компактных регулярных орбит. Алгебраически вложимые обыкновенные дифференциальные системы второго и третьего порядков, у которых состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями являются центром.

Теорема 1. *Если дифференциальная система* (1.1) *является* 0*-сильно* $(n-m)$*-алгебраически вложимой, то у неё нет изолированных компактных регулярных орбит.*

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению теоремы у системы (1.1) имеется изолированная компактная регулярная орбита.

Регулярность орбиты означает, что она представляет собой m-мерное регулярное интегральное многообразие. В силу изолированности орбита будет предельной для некоторого семейства m-мерных интегральных многообразий.

Если теперь провести прямую, которая не лежит в касательном пространстве в точке её пересечения с изолированной компактной регулярной орбитой, то будет существовать m-мерное интегральное многообразие из ранее указанного семейства, которое пересечёт прямую по крайней мере счётное число раз.

Однако, по теореме 2.1, каждая орбита системы (1.1) алгебраическая, и такая ситуация невозможна. ■

Следствие 1. *Если система* (1.1) *при* $m = 1$, *является* 0*-сильно* $(n-1)$*-алгебраически вложимой, то у неё нет предельных циклов.*

Теорема 2. *Если система* (1.1) *при* $m = 1, n = 3$ *имеет изолированное состояние равновесия с одним вещественным ненулевым и двумя чисто мнимыми характеристическими корнями, при этом она является* 0*-сильно* 2*-алгебраически вложимой, то это её состояние равновесия будет центром.*

Доказательство. Пусть изолированное состояние равновесия с одним вещественным ненулевым и двумя чисто мнимыми характеристическими корнями системы (1.1) при $m = 1$ и $n = 3$ не является центром. Тогда существует интегральная повехность, проходящая через это состояние равновесия, и траектория, расположенная на интегральной поверхности, которая будет пересекать по крайней мере счётное число раз всякую гладкую кривую, проходящую через состояние равновесия и расположенную на интегральной поверхности.

Однако по теореме 2.1 каждая траектория 0-сильно 2-алгебраически вложимой системы (1.1) при $m = 1, n = 2$ является алгебраической, и такая ситуация невозможна. ■

Теорема 3. *Если система* (1.1) *при* $m = 1, n = 2$ *является* 0*-сильно* 1*-алгебраически вложимой и имеет изолированное состояние равновесия с двумя чисто мнимыми характеристическими корнями, то это её состояние равновесия представляет собой центр.*

Доказательство основано на том, что по теореме 2.1 все траектории 0-сильно 1-алгебраически вложимой системы (1.1) при $m = 1, n = 2$ алгебраические, а поэтому состояние равновесия фокусом быть не может. ■

Обратим внимание на то, что если система (1.1) является p-сильно $(n-m)$-алгебраически вложимой и $p > 0$, то утверждения теорем $1 - 3$ и следствия 1 могут не иметь места.

Отразим это в примерах.

Пример 1. Автономная обыкновенная дифференциальная система

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_1^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1, \\ &\frac{dx_3}{dt} = x_3(1 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2) \end{aligned} \tag{1}$$

2-сильно 2-алгебраически вложима по компонентам x_1 и x_2 в алгебраическую обыкновенную дифференциальную систему

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 3x_1^2\,\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0.$$

Взяв производную в силу системы (1) от функции

$$F\colon (x_1, x_2, x_3) \to x_3, \ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

согласно [103] получаем, что траектории, соответствующие всем возможным периодическим решениям дифференциальной системы (1), должны быть расположены на её интегральной плоскости $x_3 = 0$.

При $x_3 = 0$ система (1) будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_1^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1.$$

Эта система имеет один предельный цикл [109, с. 174—179]. Поэтому и дифференциальная система (1) также имеет один предельный цикл.

Пример 2. Автономная обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^3 \tag{2}$$

1-сильно 1-алгебраически вложима по компоненте x_2 в алгебраическое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 3x_2^2 + x_2 = 0.$$

Состояние равновесия $O(0,0)$ дифференциальной системы (2) имеет чисто мнимые характеристические корни $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$.

Взяв производную в силу системы (2) от функции

$$F\colon (x_1, x_2) \to x_1^2 + x_2^2, \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

в соответствии с теоремой 7.5.3 из [9, с. 247] приходим к выводу, что состояние равновесия O дифференциальной системы (2) является устойчивым фокусом.

Пример 3. Автономная обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \ \ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^3, \ \ \frac{dx_3}{dt} = -x_3(1 + x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2) \tag{3}$$

2-сильно 2-алгебраически вложима по компонентам x_1 и x_2 в алгебраическую обыкновенную дифференциальную систему

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - \Big(\frac{dx_1}{dt}\Big)^3 - x_1 = 0, \ \ \frac{d^2x_2}{dt^2} + 3x_2^2\,\frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0.$$

Состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы (3) имеет один отрицательный $\lambda_1 = -1$ и пару чисто мнимых $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ характеристических корней.

Взяв производную в силу системы (3) от функции

$$F\colon (x_1, x_2, x_3) \to x_3, \ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

согласно [103] получаем, что траектории, соответствующие всем возможным периодическим решениям дифференциальной системы (3), должны быть расположены на её интегральной плоскости $x_3 = 0$.

При $x_3 = 0$ дифференциальная система (3) примет вид (2). В предыдущем примере доказано, что дифференциальная система (2) не имеет периодических решений, а её состояние равновесия $x_1 = x_2 = 0$ с чисто мнимыми характеристическими корнями является устойчивым фокусом.

Стало быть, и состояние равновесия $O(0,0,0)$ обыкновенной дифференциальной системы (3) — устойчивый фокус.

3. Выпрямляемость алгебраически вложимых систем

Область выпрямляемости алгебраически вложимых систем.

На основании вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) составим m обыкновенных дифференциальных систем

$$\frac{dx}{dt_j} = R^j(x), \tag{1j}$$

где $R^j(x) = \operatorname{colon}\big(R_{1j}(x), \ldots, R_{nj}(x)\big)$, $\forall x \in \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$, каждая из которых определяет линейный дифференциальный оператор

$$\mathfrak{R}_j(x) = R^j(x)\partial,\ \forall x \in \mathfrak{X},\ j = \overline{1,m}\,,\ \partial = \bigl(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}\bigr).$$

Пусть система (1j) q-сильно q-алгебраически вложима в обыкновенную дифференциальную систему, разрешённую относительно старших производных,

$$\frac{d^{\,r_j} x_i}{dt_j^{\,r_j}} = Q_{ij}\biggl(x_1, \ldots, x_q, \frac{dx_1}{dt_j}, \ldots, \frac{d^{\,r_j-1} x_q}{dt_j^{\,r_j-1}}\biggr),\ j = \overline{1,q}\,, \qquad (2j)$$

где $Q_{ij}\,(i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,q}\,)$ — полиномы своих аргументов с вещественными коэффициентами.

Система (2j) выпрямляема на области Ω вещественного арифметического пространства размерности qr_j. Тогда существует такая однозначная непрерывно дифференцируемая на области Ω векторная функция векторного аргумента $U\colon \Omega \to \mathbb{R}^{qr_j}$, что производная в силу дифференциальной системы (2j) равна

$$\frac{d^{\,r_j}}{dt_j^{\,r_j}}\, U(y)\big|_{(1\mathrm{j})} = (1, \ldots, 1),\ \forall y \in \Omega.$$

Учитывая (2.1), приходим к выводу:

$$\mathfrak{R}_j(x)\Lambda(x) = (1, \ldots, 1),\ \forall x \in \Xi,$$

где $\Lambda\colon \Xi \to \mathbb{R}^n,$ есть функция, полученная посредством замены (2.1) из функции $U\colon \Omega \to \mathbb{R}^{qr_j}$, Ξ — прообраз области Ω при этом отображении.

Поэтому (см. теорему 16.1 из [15, с. 139]) имеет место

Теорема 1. *Пусть обыкновенная дифференциальная система* (1j) *q-сильно q-алгебраически вложима в систему дифференциальных уравнений* (2j), *а система* (2j) *выпрямляема на области Ω из пространства $\mathbb{R}^{qr_j}$. Тогда дифференциальная система* (1j) *выпрямляема на области $\mathfrak{X}$.*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и система* (2j) *не имеет первых интегралов*

$$F_\tau : x \to \mathfrak{R}_\tau(x)\Lambda(x),\ \tau = \overline{1,m}\,,\ \tau \neq j,$$

а

$$\mathfrak{R}_\tau(x)\Lambda(x) \neq 0,\ \forall x \in \Xi,\ \tau = \overline{1,m}\,,\ \tau \neq j.$$

Тогда система (1.1) *выпрямляема на области* Ξ.

В самом деле, вполне разрешимая система (1.1) удовлетворяет условиям Фробениуса:

$$\big[\mathfrak{R}_k(x), \mathfrak{R}_l(x)\big] = \mathfrak{O},\ \forall x \in \mathcal{X},\ k = \overline{1,m}\,,\ l = \overline{1,m}\,.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R}_j(x)\mathfrak{R}_\tau(x)\Lambda(x) = 0,\ \forall x \in \Xi,\ j = \overline{1,m}\,,\ \tau = \overline{1,m}\,,\ j \neq \tau.$$

Поэтому отсутствие у системы (2j) указанных первых интегралов означает, что

$$\mathfrak{R}_\tau(x)\Lambda(x) = s_\tau,\ \forall x \in \Xi,\ s_\tau = \mathrm{const},\ \tau = \overline{1,m}\,,\ j \neq \tau.$$

Отсюда при $s_\tau \neq 0,\ \tau = \overline{1,m}\,,\ j \neq \tau,$ следует выпрямляемость системы (1.1) на области Ξ. ■

4. Интегралы алгебраически вложимых систем

Построение первого интеграла алгебраически вложимой системы по первому интегралу обыкновенной дифференциальной системы, в которую производится вложение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *обыкновенная дифференциальная система* (1j.3) q*-сильно* q*-алгебраически вложима в обыкновенную дифференциальную систему* (2j.3);

2) *скалярная функция*

$$L\colon (t_j, x) \to F(x)\exp(s_j\, t_j),\ \forall (t_j, x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

является первым интегралом системы (2j.3).

Тогда автономная вполне разрешимая система (1.1) *имеет первый интеграл*

$$M\colon (t,x) \to \Phi(x)\exp(s_j t_j),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \Xi,$$

где функция $\Phi\colon \Xi \to \mathbb{R},\ \Xi \subset \mathfrak{X}$, *получена с помощью замены* (2.1) *из функции* $F\colon \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^{qr_j}$.

Доказательство. Ввиду того, что функция L является первым интегралом системы (2j.3), имеет место тождество

$$\frac{d^{r_j}}{dt_j^{r_j}}\,F(x)\big|_{(2\text{j}.3)} = -\,s_j,\ \forall x \in \Omega,\ \Omega \subset \mathbb{R}^{qr_j},\ s_j = \text{const}.$$

Учитывая (2.1), получаем, что

$$\mathfrak{R}_j(x)\Phi(x) = -\,s_j,\ \forall x \in \Xi,\ \Xi \subset \mathfrak{X},$$

где $\Phi\colon \Xi \to \mathbb{R}$ есть функция, полученная из $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ посредством замены (2.1), Ξ — пробраз области Ω при этом отображении.

Последнее тождество означает, что функция M является первым интегралом системы (1.1). ■

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*:

1) *обыкновенная дифференциальная система* (1j.3) *q-сильно q-алгебраически вложима в обыкновенную дифференциальную систему* (2j.3);

2) *скалярная функция*

$$L\colon (t_j,x) \to F(x)\exp(s_j t_j),\ \forall (t_j,x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

является первым интегралом системы (2j.3);

3) *скалярные функции*

$$N_\tau\colon x \to \mathfrak{R}_\tau(x)\Phi(x),\ \tau = \overline{1,m}\,,\ \tau \ne j,$$

где функция $\Phi\colon \Xi \to \mathbb{R},\ \Xi \subset \mathfrak{X}$, *получена из скалярной функции* $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *с помощью замены* (2.1), *не являются первыми интегралами дифференциальной системы* (1j.3).

Тогда автономная вполне разрешимая система (1.1) *имеет первый интеграл*

$$M\colon (t,x) \to \Phi(x) \exp \sum_{j=1}^{m} s_j t_j, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \Xi,$$

где $s_j = -\mathfrak{R}_j(x)\Phi(x), \ \forall x \in \Xi, \ j = \overline{1,m}\,.$

Доказательство. Из условий Фробениуса

$$\bigl[\mathfrak{R}_k(x), \mathfrak{R}_l(x)\bigr] = \mathfrak{O}, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ k = \overline{1,m}\,, \ l = \overline{1,m}\,,$$

следует, что

$$\mathfrak{R}_j(x)\mathfrak{R}_\tau(x)\Phi(x) = 0, \ \forall x \in \Xi, \ \Xi \subset \mathcal{X}, \ \tau = \overline{1,m}\,, \ \tau \neq j.$$

Поэтому отсутствие у системы (1j.3) указанных первых интегралов означает, что

$$\mathfrak{R}_\tau(x)\Phi(x) = -s_\tau, \ \forall x \in \Xi, \ s_\tau = \mathrm{const}, \ \tau = \overline{1,m}\,.$$

Отсюда следует, что M является первым интегралом дифференциальной системы (1.1). ■

5. Об одном преобразовании

Необходимое условие существования невырожденного преобразования, сохраняющего рациональность правых частей системы уравнений в полных дифференциалах по новым переменным.

При решении некоторых вопросов алгебраической вложимости может быть полезен следующий подход [80].

Поставим задачу о нахождении условий необходимых для сущетсвования невырожденного преобразования

$$y_\tau = x_\tau, \ \tau = \overline{1,q}\,, \ \ y_\theta = y_\theta(x_{q+1}, \ldots, x_n), \ \theta = \overline{q+1,n}\,, \qquad (1)$$

переводящего систему (1.1) в систему

$$dy = T(y)\, dt, \qquad (2)$$

у которой элементы T_{ij} матрицы $T(y) = \|T_{ij}(y)\|, \ i = \overline{1,n}\,,$

$j=\overline{1,m}$, суть рациональные функции по y.

Предположим, что преобразование (1) существует. Тогда имеет место система тождеств

$$\frac{\mathsf{D}\, y(x)}{\mathsf{D}\, x}\, R(x) = T(y(x)),\ \forall x\in\mathfrak{X}, \tag{3}$$

первые q тождеств которой не содержат производных от y.

Поэтому если существует преобразование вида (1), переводящее систему (1.1) в систему (2), то оно должно удовлетворять системе из q первых тождеств системы (3).

Пример 1. Для существования преобразования

$$y_1=x_1,\ \ y_2=y_2(x_1,x_2),\ \forall (x_1,x_2)\in\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}\subset\mathbb{R}^2,$$

переводящего дифференциальную систему

$$\frac{dx_1}{dt} = -1-x_1^2-x_2^2-3x_1x_2^2-2x_2^4,\quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}\,x_2+\frac{1}{2}\,x_1x_2+\frac{1}{2}\,x_2^3$$

в систему

$$\frac{dy_1}{dt} = -1-y_2-y_1^2-3y_1y_2-2y_2^2,\quad \frac{dy_2}{dt} = y_2+y_1y_2+y_2^2,$$

необходимо, чтобы

$$-1-x_1^2-x_2^2-3x_1x_2^2-2x_2^4 =$$

$$= -1-y_2(x_1,x_2)-x_1^2-3x_1y_2(x_1,x_2)-2y_2^2(x_1,x_2),\ \forall (x_1,x_2)\in\mathfrak{X}.$$

Отсюда получаем, что

$$y_2(x_1,x_2)=x_2^2,\ \forall (x_1,x_2)\in\mathfrak{X},$$

ибо якобиан преобразования

$$\frac{\mathsf{D}\,(x_1,x_2^2)}{\mathsf{D}\,(x_1,x_2)} = 2x_2$$

и отличен от нуля на области

$$\mathfrak{X}=\{(x_1,x_2)\colon x_1\in\mathbb{R},\ x_2\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что этим преобразованием осуществляется требуемый переход.

§4. Компактные регулярные слоения коразмерности один автономных полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах

1. Изолированные компактные регулярные орбиты

В этом пункте систему (IAPCD) будем рассматривать, когда $m = n-1$ и у матрицы $P \in \mathbb{M}^{n,n-1}$ ранг $\operatorname{rank} P(x) = n-1$ почти везде на $\mathbb{R}^n$.

Для системы (IAPCD) классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ введём вспомогательную функцию

$$X(x) = \prod_{k=1}^{s+r} w_k(x) \prod_{\tau=1}^{\mathfrak{s}+\mathfrak{r}} \bigl(\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{r}}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{r}}(x)\bigr), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

На основании теорем 2.2.3.2, 1.3.2 и 3.3.2 получаем

Теорема 1. *Пусть алгебраическое многообразие*

$$X(x) = 0 \tag{1}$$

делит фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ *на конечное число* χ *линейно связных областей* $\mathfrak{X}_\tau$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\mathfrak{X}_\tau)$ *ранга* $d(\mathfrak{X}_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1,\chi}$, *соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы* 2.2.3.2 *система* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *не может иметь более* $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии* (1).

На основании следствия 4.3.3.2 и теоремы 3.3.2 имеем

Теорема 2. *Пусть алгебраическое многообразие* (1) *делит фазовое пространство* $\mathbb{R}^n$ *на конечное число* χ *линейно связных областей* $\mathfrak{X}_\tau$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\mathfrak{X}_\tau)$ *ранга* $d(\mathfrak{X}_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1,\chi}$, *соответсвенно. Тогда при выполнении условий следствия* 4.3.3.2 *система* (IAPCD$\mathfrak{A}$)

не может иметь более $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии* (1).

На основании следствия 7.3.3.2, теорем 1.3.2 и 3.3.2 получаем

Теорема 3. *Пусть алгебраическое многообразие* (1) *делит фазовое пространство* $\mathbb{R}^n$ *на конечное число* χ *линейно связных областей* $\mathfrak{X}_\tau$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\mathfrak{X}_\tau)$ *ранга* $d(\mathfrak{X}_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1,\chi}$, *соответственно. Тогда при выполнении условий следствия* 7.3.3.2 *система* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *не может иметь более* $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии* (1).

На основании следствия 1.4.3.2, теорем 1.3.2 и 3.3.2 получаем

Теорема 4. *Пусть алгебраическое многообразие* (1) *делит фазовое пространство* $\mathbb{R}^n$ *на конечное число* χ *линейно связных областей* $\mathfrak{X}_\tau$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\mathfrak{X}_\tau)$ *ранга* $d(\mathfrak{X}_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1,\chi}$, *соответственно. Тогда при выполнении условий следствия* 1.4.3.2 *система* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *не может иметь более* $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии* (1).

На основании следствия 3.4.3.2 и теоремы 3.3.2 получаем

Теорема 5. *Пусть алгебраическое многообразие* (1) *делит фазовое пространство* $\mathbb{R}^n$ *на конечное число* χ *линейно связных областей* $\mathfrak{X}_\tau$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\mathfrak{X}_\tau)$ *ранга* $d(\mathfrak{X}_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1,\chi}$, *соответственно. Тогда при выполнении условий следствия* 3.4.3.2 *система* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *не может иметь более* $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии* (1).

На основании следствия 6.4.3.2, теорем 1.3.2 и 3.3.2 получаем

Теорема 6. *Пусть алгебраическое многообразие* (1) *делит фазовое пространство* $\mathbb{R}^n$ *на конечное число* χ *ли-*

нейно связных областей $\mathfrak{X}_\tau$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\mathfrak{X}_\tau)$ *ранга* $d(\mathfrak{X}_\tau)=r_\tau,\ \tau=\overline{1,\chi}$, *соответственно. Тогда при выполнении условий следствия* 6.4.3.2 *система* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *не может иметь более* $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии* (1).

Рассмотрим систему (IAPCD) в случае $n=2,\, m=1$, то есть, когда она является автономной полиномиальной обыкновенной дифференциальной системой (APD) второго порядка.

В этом случае изолированные компактные регулярные орбиты являются предельными циклами.

На основании теорем 1, 2 и 4 соответственно получаем

Теорема 7. *Пусть алгебраическая кривая* (1) *делит фазовую плоскость* $\mathbb{R}^2$ *на конечное число* χ *линейно связных областей* $\mathfrak{X}_\tau$ *связности* $r_\tau+1,\ \tau=\overline{1,\chi}$, *соответственно. Тогда при* $\mathfrak{c}=\dfrac{p(p+1)}{2}-1$, *когда определитель* $\Delta\neq 0$, *система* (APD) *второго порядка не может иметь более* $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *предельных цилов, не расположенных на кривой* (1).

Теорема 8. *Пусть алгебраическая кривая* (1) *делит фазовую плоскость* $\mathbb{R}^2$ *на конечное число* χ *линейно связных областей* $\mathfrak{X}_\tau$ *связности* $r_\tau+1,\ \tau=\overline{1,\chi}$, *соответственно. Тогда при* $\mathfrak{c}=\dfrac{p(p+1)}{2}$, *когда определитель* $\Lambda\neq 0$, *система* (APD) *второго порядка не может иметь более* $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *предельных цилов, не расположенных на кривой* (1).

Теорема 9. *Пусть алгебраическая кривая* (1) *делит фазовую плоскость* $\mathbb{R}^2$ *на конечное число* χ *линейно связных областей* $\mathfrak{X}_\tau$ *связности* $r_\tau+1,\ \tau=\overline{1,\chi}$, *соответственно. Тогда при* $\mathfrak{c}+\mathfrak{e}=\dfrac{p(p+1)}{2}$, *когда определитель* $\widetilde{\Lambda}\neq 0$ *и выполняются условия* (8.4.3.2), *система* (APD) *второго поряд-*

ка не может иметь более $\sum\limits_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ *предельных цилов, не расположенных на кривой* (1).

2. Регулярные центры

В этом пункте систему (IAPCD) будем рассматривать, когда $n=2k,\ k\in\mathbb{N},$ и у матрицы $P\in\mathbb{M}^{n,n-1}$ ранг $\operatorname{rank}P(x)=n-1$ почти везде на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Изолированную особую точку* A *системы* (IAPCD) *назовём* ***регулярным центром****, если орбита, проходящая через всякую точку из любой сколь угодно малой* ε*-окрестности особой точки* A, *является регулярной, диффеоморфной сфере* S^{n-1} *и охватывает точку* A.

Отметим, что в случае $n = 2$ данное понятие совпадает с понятием центра для двумерной автономной обыкновенной дифференциальной системы.

Пусть система (IAPCD) принадлежит классу $\mathfrak{A}$, а (APDk) есть индуцированая ею автономная обыкновенная дифференциальная система, число

$$\ell=\binom{n+p_k-1}{n}-\left[\frac{p_k+1}{2}\right],$$

где символ $[\ ]$ означает целую часть числа, $k\in\{1,\ldots,n-1\}$.

На основании скалярной функции

$$F\colon x\to X(x)\exp Y(x),\ \forall x\in\Omega,\ \Omega\subset\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n,$$

составим два тождества

$$\mathfrak{p}_k(x)F(x)=\left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2}\right]}\sigma_j x_l^{2j}-\operatorname{div}\mathfrak{p}_k(x)\right]F(x),\ \forall x\in\Omega,\qquad(1)$$

и

$$\mathfrak{p}_k(x)F(x) = \left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2}\right]} \sigma_j x_l^{2j}\right] F(x),\ \forall x \in \Omega, \tag{2}$$

где $\sigma_j,\ j = \overline{0, [(p_k-1)/2]}\,$, есть некоторые вещественные числа, а $x_l,\ l \in \{1, \ldots, n\}$, есть l-я координата точки $x \in \mathbb{R}^n$.

Тождества (1) и (2) соответственно приводим к видам

$$\Xi_k(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2}\right]} \sigma_j x_l^{2j} - \operatorname{div} \mathfrak{p}_k(x),\ \forall x \in \Omega, \tag{3}$$

и

$$\Xi_k(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2}\right]} \sigma_j x_l^{2j},\ \forall x \in \Omega. \tag{4}$$

Тождество (3) (тождество (4)) распадается на систему линейных уравнений относительно

$$\gamma_k,\ \eta_{\mathfrak{k}},\ \tau_{\mathfrak{k}},\ \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}},\ \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\xi_\mathfrak{l}}\, \mathfrak{g}_{\xi_\mathfrak{l}}},\ \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\xi_\mathfrak{l}}\, \mathfrak{g}_{\xi_\mathfrak{l}}},\ \beta_\nu \quad \text{и} \quad \sigma_j,$$

которая состоит из двух подсистем.

Первая подсистема получена путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях правых и левых частей тождества (3) (тождества (4)), за исключением коэффициентов при переменных $x_l^{2j},\ j = \overline{0, [(p_k-1)/2]}\,$.

Вторая подсистема — это остальные уравнения, которые являются результатом равенства коэффициентов при переменных $x_l^{2j},\ j = \overline{0, [(p_k-1)/2]}\,$, правых и левых частей тождества (3) (тождества (4)).

При этом первая подсистема содержит лишь

$$\gamma_k,\ \eta_{\mathfrak{k}},\ \tau_{\mathfrak{k}},\ \alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}},\ \varphi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\xi_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\xi_{\mathfrak{l}}}},\ \psi_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\xi_{\mathfrak{l}}}\mathfrak{g}_{\xi_{\mathfrak{l}}}},\ \beta_\nu;$$

а во вторую подсистему входят дополнительно σ_j, причём σ_j содержится лишь в одном уравнении и в разных уравнениях содержатся разные σ_j.

Поэтому $\sigma_j,\ j=\overline{0,[(p_k-1)/2]}$, всегда могут быть выражены через все остальные неизвестные.

Из сказаного вытекает, что исходная система, построенная на основании тождества (3) (тождества (4)), совместна тогда и только тогда, когда совместна её первая подсистема.

Определители первых подсистем для тождеств (3) и (4) совпадают и имеют порядок $\binom{n+p_k-1}{n}-\left[\dfrac{p_k+1}{2}\right].$

Обозначим этот определитель $\overline{\Delta}$.

Если $\overline{\Delta}\ne 0$, то совместна первая подсистема, построенная на основании тождества (3), а при $\overline{\Delta}=0$ у первой подсистемы, построенной на основании тождеств (4), всегда существует нетривиальное решение.

Если $\overline{\Delta}\ne 0$ и $\sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2}\right]}|\sigma_j|\ne 0$, то согласно (1) и теореме 1.3.2 особая точка A не может быть регулярным центром дифференциальной системы (IAPCD$\mathfrak{A}$).

Если $\overline{\Delta}=0$ и $\sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2}\right]}|\sigma_j|\ne 0$, то согласно (2) и теореме 2.2.1 особая точка A также не может быть регулярным центром дифференциальной системы (IAPCD$\mathfrak{A}$).

Если $\sigma_j=0,\ j=\overline{0,[(p_k-1)/2]}$, то при $\overline{\Delta}\ne 0$ согласно (1) система (APDk) имеет последний множитель (2.3.3.2), а при $\overline{\Delta}=0$ — первый интеграл (1.3.3.2).

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Если система* (IAPCD) *принадлежит классу* $\mathfrak{A}$, *число* $\ell = \binom{n+p_k-1}{n} - \left[\dfrac{p_k+1}{2}\right]$, *то её особая точка* A *может быть регулярным центром лишь тогда, когда система* (APDk) *имеет первый интеграл* (1.3.3.2) *или последний множитель* (2.3.3.2).

Осюда можно сделать такой вывод

Предложение 1. *Если у системы* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *особая точка* A *при* $\ell = \binom{n+p_k-1}{n} - \left[\dfrac{p_k+1}{2}\right]$ *является регулярным центром, то система* (APDk) *имеет либо первый интеграл* (1.3.3.2), *либо последний множитель* (2.3.3.2).

Аналогично на основании предложения 1 получаем

Теорема 2. *Если система* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *при*

$$\ell = \binom{n+p_k-1}{n} - \left[\frac{p_k+1}{2}\right]$$

не имеет первых интегралов (3.3.3.2) *и* (9.3.3.2), *и её особая точка* A *является регулярным центром, то система* (IAPCD$\mathfrak{A}$) *имеет либо первый интеграл* (5.2.3.2), *либо последний множитель* (7.2.3.2).

Рассмотрим систему (IAPCD) в случае $n = 2, m = 1,$ то есть, когда она является автономной полиномиальной обыкновенной дифференциальной системой (APD) второго порядка.

На основании теоремы 1 получаем

Теорема 3. *Пусть у системы* (APD) *второго порядка число* $\ell = \dfrac{p(p+1)}{2} - \left[\dfrac{p+1}{2}\right]$. *Тогда её особая точка второй группы может быть центром лишь тогда, когда её уравнение траекторий имеет первый интеграл* (1.3.3.2) *или интегрирующий множитель* (2.3.3.2).

Если использовать теорему 5.2 из [84, с. 30] при $\overline{\Delta} \neq 0,$ а при $\overline{\Delta} = 0$ теорему 21.1 из [84, с. 164], то приходим к выводу.

Теорема 4. *Пусть у системы* (APD) *второго порядка число* $\ell = \dfrac{p(p+1)}{2} - \left[\dfrac{p+1}{2}\right]$. *Тогда её особая точка второй группы, не расположенная на кривой* (1.1), *является центром тогда и только тогда, когда её уравнение траекторий имеет первый интеграл* (1.3.3.2) *или интегрирующий множитель* (2.3.3.2).

Заметим, что если особая точка второй группы системы (APD) второго порядка с чисто мнимыми характеристическими корнями при выполнении условий теоремы 3 расположена на кривой (1.1), то различение центра и фокуса всегда можно осуществить на основании теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле (см. следствие 4.2 из [84, с. 28]).

На основании теоремы 3 заключаем

Теорема 5. *Пусть система* (APD) *второго порядка имеет число* $\ell = \dfrac{p(p+1)}{2} - \left[\dfrac{p+1}{2}\right]$ *и хотя бы одну особую точку центр. Тогда её уравнение траекторий имеет либо первый интеграл* (1.3.3.2), *либо интегрирующий множитель* (2.3.3.2).

Пример 1. Вполне разрешимая система

$$\begin{aligned}
dx_1 &= (-x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^3)\,dt_1 + (-x_3 - 2x_2x_4 + x_4^3)\,dt_2 + \\
&\quad + \ (-x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4^3)\,dt_3, \\
dx_2 &= (x_1 - x_2^2)\,dt_1 - x_4\,dt_2 + (x_3 - x_4^3)\,dt_3, \\
dx_3 &= (-x_4 + 3x_3x_4^2 - 3x_4^5)\,dt_1 + (x_1 - x_2^2 + 3x_2x_4^2)\,dt_2 + \\
&\quad + \ (-x_2 + 3x_1x_4^2 - 3x_2^2x_4^2)\,dt_3, \\
dx_4 &= (x_3 - x_4^3)\,dt_1 + x_2\,dt_2 + (x_1 - x_2^2)\,dt_3,
\end{aligned} \tag{5}$$

имеет полиномиальные частные интегралы

$$w_l \colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2^2 + x_2^4 - 2x_3x_4^3 + x_4^6 - l, \ \forall x \in \mathbb{R}^4, \ l = \overline{1,13}\,.$$

Особая точка $O(0,0,0,0)$ вполне разрешимой системы (5) является регулярным центром, а сама система согласно теореме 2 при $k = 2$ имеет автономный первый интеграл

$$F\colon x \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2^2 + x_2^4 - 2x_3x_4^3 + x_4^6, \ \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

Список использованной литературы

1. *Амелькин В.В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Университетское, 1985. – 142 с.

2. *Амелькин В.В., Малевич А.Э.* Предельные свойства орбит общих динамических систем. I; II // Вестник БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. – 1999. – № 2. – С. 42 – 46; – 2000. – № 1. – С. 38 – 42.

3. *Бабарико Н.Н., Горбузов В.Н.* К вопросу об интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. Акад. наук БССР. – 1984. – Т. 28, № 7. – С. 581 – 584.

4. *Бабарико Н.Н., Горбузов В.Н.* К вопросу о построении первого интеграла или последнего множителя нелинейной системы дифференциальных уравнений // Докл. Акад. наук БССР. – 1986. – Т. 30, № 9. – С. 791 – 792.

5. *Базылев В.Т.* Геометрия дифференцируемых многообразий. – М.: Высшая школа, 1989. – 221 с.

6. *Барбашин Е.А.* Метод сечений в теории динамических систем. – Минск: Наука и техника, 1979. – 120 с.

7. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

8. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976. – 496 с.

9. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.

10. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантовых полей. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 444 с.

11. *Буслюк Д.В., Горбузов В.Н.* Интегралы системы Якоби в частных производных//Веснік ГрДУ. Сер. 2. – 2000. – №1(3). – С. 4 – 11.

12. *Буслюк Д.В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 3. – С. 418 – 419.

13. *Буслюк Д.В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 / Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 2000. – 95 с.

14. *Гайшун И.В.* Автономные вполне интегрируемые уравнения. – Минск: Ин-т мат. Акад. наук БССР, 1981. – 38 с.

15. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983. – 272 с.

16. *Гайшун И.В.* Линейные уравнения в полных производных. – Мн.: Наука и техника, 1989. – 254 с.

17. *Гайшун И.В.* Условия выпрямляемости вполне интегрируемых уравнений // Докл. Акад. наук БССР. – 1981. – Т. 25, № 5. – С. 389 – 391.

18. *Галиуллин А.С.* Аналитическая динамика. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.

19. *Галиуллин А.С.* Инвариантность действия и обратные задачи динамики // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 8. – С. 1318 – 1325.

20. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

21. *Горбузов В.Н.* Автономность интегралов и последних множителей обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 6. – С. 939 – 946.

22. *Горбузов В.Н.* Автономность системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 149 – 156.

23. *Горбузов В.Н.* Алгебраически вложимые системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 9. – С. 1579 – 1580.

24. *Горбузов В.Н.* К вопросу выпрямляемости многомерных динамических систем // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 3. – С. 36 – 38.

25. *Горбузов В.Н.* К вопросу об интегрируемости в квадратурах // Докл. Акад. наук БССР. – 1981. – Т. 25, № 7. – С. 584 – 585.

26. *Горбузов В.Н.* К вопросу устойчивости компактных регулярных орбит // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 4. – С. 40 – 43.

27. *Горбузов В.Н.* Математический анализ: теория поля. – Гродно: ГрГУ, 2000. – 627 с.

28. *Горбузов В.Н.* Об одной дифференциальной системе второго порядка и её периодических решениях // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 9. – С. 1487 – 1497.

29. *Горбузов В.Н.* О некоторых классах автономных систем с частным интегралом // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 9. – С. 1685 – 1687.

30. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б.* К вопросу устойчивости состояния равновесия многомерного дифференциального уравнения // Вестник БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. – 1997. – № 3. – С. 37 – 39.

31. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б.* О траекториях и построении функций Ляпунова алгебраически вложимых автономных дифференциальных систем // Вестник Бел. гос. ун-та, Сер. 1. Физ. Мат. Мех. – 1995. – № 1. – С. 38 – 42.

32. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б.* Решения, интегралы и предельные циклы системы Дарбу n-го порядка // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). – 2002. – № 2. – С. 26 – 46.

33. *Горбузов В.Н.* Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 562 – 564.

34. *Горбузов В.Н.* Признаки ограниченности числа возможных компактных гиперповерхностей, определяемых дифференциальными системами // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 30 – 37.

35. *Горбузов В.Н.* Признаки ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 10. – С. 1325 – 1329.

36. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Интегралы $\mathbb{R}$-линейных систем в полных дифференциалах // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 49 – 52.

37. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Построение интегралов линейной дифференциальной системы // Веснiк ГрДУ. Сер. 2. – 2003. – № 2(22). – С. 50 – 60.

38. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). – 2001. – № 3. – С. 17 – 45.

39. *Горбузов В.Н., Самодуров А.А.* Уравнение Дарбу и его аналоги. – Гродно: ГрГУ, 1985. – 94 с.

40. *Горбузов В.Н., Самодуров А.А.* Уравнения Риккати и Абеля. – Гродно: ГрГУ, 1986. – 101 с.

41. *Горбузов В.Н.* Системы со специальными аналитическими и качественными свойствами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1981. – 154 с.

42. *Горбузов В.Н.* Теорема Пуанкаре об отсутствии компактных регулярных орбит и её приложение // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1563 – 1565.

43. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 3. – С. 76 – 94.

44. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы систем в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1819 – 1822.

45. *Горбузов В.Н.* Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). – 2000. – № 2. – С. 1 – 36.

46. *Грудо Э.И.* Структура решений автономной системы Пфаффа в одном алгебраическом случае // Весцi Акад. навук БССР. Сер. фiз.-мат.

навук. – 1982. – № 2. – С. 11 – 15.

47. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. II. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 564 с.

48. *Гюнтер Н.М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – Л.;М.: ОНТИ, 1934. – 360 с.

49. *Долов М.В., Алексеев А.А.* Об отсутствии предельных циклов динамических систем с интегрирующим множителем специального вида // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 6. – С. 947 – 954.

50. *Долов М.В.* Интеграл Дарбу в случае фокуса // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 7. – С. 1173 – 1178.

51. *Долов М.В.* Интегралы Дарбу и особые циклы // Дифференц. и интегр. уравнения (Горький). – 1985. – С. 5 – 8.

52. *Долов М.В.* Канонические интегралы и предельные циклы: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Горький, 1983.

53. *Долов М.В.* Канонический интеграл в окрестности фокуса // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 1946 – 1953.

54. *Долов М.В., Косарев В.В.* Интегралы Дарбу и аналитическая структура решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 4. – С. 697 – 700.

55. *Долов М.В.* О дифференциальных уравнениях, имеющих интегралы Дарбу // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 10. – С. 1765 – 1779.

56. *Долов М.В.* О дифференциальных уравнениях, порождённых интегралом типа Дарбу // Дифференц. и интегр. уравнения (Нижний Новгород). – 1990. – С. 31 – 37.

57. *Долов М.В.* Особые циклы и обобщённые алгебраические первые интегралы // Дифференц. и интегр. уравнения (Горький). – 1987. – С. 29 – 31.

58. *Долов М.В., Павлюк Ю.В.* О предельных циклах эллиптического типа двумерных автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, №10. – С. 1303 – 1309.

59. *Долов М.В., Чистякова С.А.* О структуре общего решения и интегрируещего множителя в окрестности простой особой точки // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 5. – С. 710 – 713.

60. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.

61. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т. 16, вып. 6. – С. 659 – 670.

62. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 416 с.

63. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Факториал, 1997. – 304 с.

64. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Факториал, 1997. – 512 с.

65. *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи мат. наук. – 1992. – Т. 47, вып. 4(286). – С. 83 – 144.

66. *Имшенецкий В.Г.* Дополнение теории и одно приложение способа нахождения рациональных дробных решений линейных дифференциальных уравнений // Зап. Петерб. Акад. наук. Сер. 7. – 1888. – Т. 58. – С. 1 – 28.

67. *Картан Э.* Избранные труды. – М.: МЦНМО, 1998. – 392 с.

68. *Картан Э.* Интегральные инварианты. – М.;Л.: ГИТТЛ, 1940. – 216 с.

69. *Качественная* теория динамических систем второго порядка/ Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

70. *Коркин А.Н.* Изыскания о множителях дифференциальных уравнений первого порядка // Матем. сб. – 1903 – 1904. – Т. 24, № 2 – 3. – С. 194 – 416.

71. *Лагутинский М.* Частные алгебраические интегралы. – Харьков: А. Дарре, 1908. – 211 с.

72. *Ладис Н.Н.* Топологическая эквивалентность линейных действий $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 3. – С. 443 – 448.

73. *Ладис Н.Н.* Топологическая эквивалентность неавтономных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 951 – 953.

74. *Ладис Н.Н.* Топологические инварианты комплексных линейных потоков // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 12. – С. 2159 – 2169.

75. *Летников А.В.* Об условиях интегрируемости некоторых дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1866. – Т. 1. – С. 143 – 194.

76. *Малевич А.Э.* Свойства орбит автономных вполне интегрируемых уравнений первого порядка в полных производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 / БГУ. – Минск, 1997. – 105 с.

77. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – СПб.: Изд-во «Лань», 2003. – 832 с.

78. *Математика* в СССР за сорок лет. 1917 – 1957. Т. 2. Библиография. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 820 с.

79. *Мироненко В.И.* Дифференциальные системы, эквивалентные

по вложимости // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 7. – С. 1225 – 1231.

80. *Мироненко В.И.* Замечания о стационарных интегралах и о стационарных преобразованиях неавтономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 864 – 868.

81. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 104 с.

82. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений системы дифференциальных уравнений и системы с алгебраическими траекториями // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 12. – С. 2197 – 2204.

83. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

84. *Нелинейные* колебания в системах второго порядка/ Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 210 с.

85. *Немыцкий В.В.* Общие динамические системы // Докл. Акад. наук СССР. – 1946. – Т. 53, № 6. – С. 495 – 498.

86. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

87. *Овсянников Л.В., Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ дифференциальных уравнений механики // Итоги науки и техники: Общая механика. Т. 2. – М.: ВИНИТИ, 1975. – С. 5 – 72.

88. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

89. *Павлючик П.Б.* Алгебраически вложимые системы дифференциальных уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 8. – С. 1130 – 1131.

90. *Перов А.И.* Изучение окрестности особой точки многомерного дифференциального уравнения в аналитическом случае // Докл. Акад. наук СССР. – 1966. – Т. 166, № 3. – С.544 – 547.

91. *Перов А.И.* К вопросу о структуре предельного множества // Докл. Акад. наук СССР. – 1967. – Т. 176, № 3. – С. 526 – 529.

92. *Перов А.И.* Многомерные дифференциальные уравнения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. – Воронеж, 1966. – 300 с.

93. *Перов А.И.* О топологических характеристиках решений многомерных дифференциальных уравнений // Докл. Аакад. наук СССР. – 1964. – Т. 157, № 4. – С. 791 – 794.

94. *Перов А.И., Эгле И.Ю.* К теории Пуанкаре-Донжуа многомерных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 5. – С. 801 – 810.

95. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 516 с.

96. *Построение* систем программного движения / Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

97. *Проневич А.Ф.* Базис автономных первых интегралов линейной системы третьего порядка в комплексной области // Веснік ГрДУ. Сер. 2. – 2002. – № 2(11). – С. 23 – 29.

98. *Проневич А.Ф.* Интегралы линейной многомерной системы простой матричной структуры // Mathematical research (Saint-Petrsburg). – 2003. – Vol. 10. – P. 143 – 152.

99. *Проневич А.Ф.* Интегралы якобиевой системы в комплексной области // Веснік ГрДУ. Сер. 2. – 2002. – № 1(9). – С. 19 – 25.

100. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

101. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. – 355 с.

102. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

103. *Ткачёв В.Ф.* Обобщение одной теоремы А. Пуанкаре об отсутствии предельных циклов и некоторые другие результаты // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. XVI, вып. 5(101). – С. 205 – 207.

104. *Тыщенко В.Ю.* Системы обыкновенных дифференциальных уравнений со специальными интегралами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 / Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 1993. – 85 с.

105. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и в частных производных. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

106. *Чеботарёв Н.Г.* Теория групп Ли. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1940. – 360 с.

107. *Черкас Л.А.* Методы оценки числа предельных циклов автономных систем // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 779 – 802.

108. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947. – 360 с.

109. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенне дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.

110. *Gauss C.F.* Bericht über die Abhandlung von Pfaff // Götting. gelehrte Anzeigen. – 1815. – Vol. 1. – S. 1025 – 1038.

111. *Darboux M.G.* Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré// Bull. des sci. – 1878.

– Vol. 2. – P. 60 – 96.

112. *Drach J.* Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes // Ann. sci. École norm. super. Sér. 3. – 1898. – Vol. 15. – P. 243 – 384.

113. *Frobenius G.* Ueber das Pfaff'sche Problem // J.für die reine und angew. Math. – 1877. – Bd. 82, H. 3 – 4. – S. 230 – 315.

114. *Hopf E.* Statistical hydromechanics and functional calculus // J. Rat. Mech. Anal. – 1952. – Vol. 87, No. 1. – P. 19 – 43.

115. *Jacobi C.G.J.* De integratione aequationis differentialis $(A+A'x+A''y)(xdy-ydx)-(B+B'x+B''y)dy+(C+C'x+C''y)dx=0.$ // J. für reine und angew. Math. – 1842. – Bd. 24. – S. 1 – 4.

116. *Jacobi C.G.J.* Theoria nova multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi // J. für reine und angew. Math. – 1844. – Vol. 27. – S. 199 – 268; 1845. – Vol. 29. – S. 213 – 279, 333 – 376.

117. *Jacobi C.G.J.* Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integrieren // J. für reine und angew. Math. – 1827. – Bd. 2, H. 2. – S. 347 – 357.

118. *Minding F.* Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung // Mem. de l'Acad. des Sci. de St.-Petersbourg VII-me série. – 1862. – Vol. 5, No. 1. – P. 1 – 95.

119. *Lie S.* Theorie des Pfaff'schen Problems // Ark. math. og naturvidenskab. – 1877. – Bd. 2. – S. 338 – 379.

120. *Lie S.* Über gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestattet // Ark. math. og naturvidenskab. – 1882. – Bd. 7, H. 4. – S. 443 – 444.

121. *Lie S.* Über Gruppen von Transformationen // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. – 1874. – Bd. 9. – S. 529 – 542.

122. *Lie S.* Verallgemeinerung und neue Verwertung der Jacobischen Multiplicator-Theorie // Förhandl. vid.-selsk. Christiania. – 1874 – 1875. – Bd. 8. – S. 255 – 274.

123. *Lie S.* Zur Theorie des Integrabilitätsfactors // Förhandl. vid.-selsk. Christiania. – 1874 – 1875. – Bd. 8. – S. 242 – 254.

124. *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites // J. math. pures et appl. – 1839. – Vol. 4. – P. 423 – 456.

125. *Liouville J.* Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // J. math. pures et appl. – 1841. – Vol. 6. – P. 1 – 13, 36.

126. *Pfaff J.F.* Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nee non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotanque variables, complete integrandi // Abhandl. Kgl.

Akad. Wiss. Berlin. – 1814 – 1815. – S. 76 – 135.

127. *Vessiot E.* Sur l'integration des équations différentielles linéaires // Ann. sci. École norm. super. Sér. 3. – 1892. – Vol. 9. – P. 197 – 280.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Горбузов Виктор Николаевич

ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Монография

Редактор Н.Н. Красницкая
Компьютерная верстка: А.Ф. Проневич

Сдано в набор 05.04.2005. Подписано в печать 23.05.2005.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать RISO. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 15,89. Уч.-изд. л. 15,07. Тираж 100 экз. Заказ

Учреждение образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»
ЛИ № 02330/0133257 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.

Отпечатано на технике Института последипломного образования
Учреждения образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»
ЛП № 02330/0056882 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.